

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-03-14, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Jacob Sznajdman, tel. 0762-721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

- =====
1. Låt $F(x, y, z) = xyz - \sin(x^2 - z^2) - \cos(y^2 - z^2)$.
 - a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x, y, z) = 0$ i punkten $(1, 1, 1)$. (4p)
 - b) Visa att nivåytan $F(x, y, z) = 0$ lokalt kring punkten $(1, 1, 1)$ är en funktionsyta $z = f(x, y)$ och bestäm $f'_x(1, 1)$. (4p)

 2. Beräkna arean av ytan $Y : z = \cosh\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$, $|y| \leq x \leq \sqrt{2} \ln 2$. (7p)

 3. Bestäm de lägsta och de högsta punkterna på ytan $Y : z = x^3 + y^2$, $3x^2 + 2y^2 \leq 4$ (dvs. punkterna $(x, y, z) \in Y$ med minsta resp. största z -koordinat). (7p)

 4. Låt $\mathbf{F} = (yz, xy, x + y + z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 - a) Är \mathbf{F} bijektiv lokalt i origo, resp. bijektiv lokalt i $(1, 1, 1)$? (2p+2p) (4p)
 - b) Har \mathbf{F} en potential i \mathbb{R}^3 ? Har \mathbf{F} en vektorpotential i \mathbb{R}^3 ? (2p+2p) (4p)
 - c) Beräkna $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ då C är skärningskurvan mellan ytan $Y : z = x^3 + y^2$ och cylindern $3x^2 + 2y^2 = 4$ genomlöpt moturs sett uppifrån. (ledn.: använd Stokes sats) (7p)

 5. Låt K vara pyramiden med hörnpunkterna $\pm(a, 0, 0)$, $\pm(0, a, 0)$ och $(0, 0, a)$, $a > 0$ och $\mathbf{v} = (e^{x \sin z} - xye^{y \sin z} \cos z, 3xy^2 z^2 - ye^{x \sin z} \sin z, (1 - 2xy)z^3 + e^{y \sin z})$.
Beräkna flödet av strömningsfältet \mathbf{v} uppåt genom pyramidens sneda sidor (dvs. genom ∂K utom botten, i positiva z -axelns riktning). (8p)

 6. a) Definiera enkelt sammanhängande mängd i \mathbb{R}^2 . (2p)
 b) Visa att om $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ så är f kontinuerlig i \mathbf{a} . (5p)
 c) Formulera och bevisa Greens sats. (8p)