

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-01-14, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Martin Berglund, tel. 0762 – 721860

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $Y : x^2 + y^2z + yz^2 = 4$ i punkten $(2, 1, -1)$. (4p)

2. Beräkna arean av spiralrampen $Y : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \theta) = (t \cos(\theta), t \sin(\theta), \theta), \frac{1}{2} \leq t \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$. (7p)

3. Visa att origo är en stationär punkt och bestäm dess karaktär till

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \tan(xy)$ b) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 2 \tan(xy)$ (4p var) (8p)

4. Låt $\mathbf{v} = (x^3 + xe^{xy} - z, xy - ye^{xy} + y^3 + z, -xz + y + z^3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

a) Är \mathbf{v} bijektivt lokalt i origo? Är \mathbf{v} konservativt i \mathbb{R}^3 ? (2p var) (4p)

b) Beräkna flödet av \mathbf{v} ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (7p)

5. Beräkna det arbete som fältet $\mathbf{IF}(x, y) = \left(\frac{\sinh(x-y) - \cosh(x-y)}{\cosh(x-y)}, \frac{\cosh(x-y) - \sinh(x-y)}{\cosh(x-y)} \right)$ uträttar då en partikel förflyttas längs spiralbågen $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = \left(\frac{\cos(\varphi)}{\varphi}, \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \right), \frac{\pi}{4} \rightarrow \varphi \rightarrow 2\pi$. (7p)

6. Låt $Y : x^2 + y^2z + yz^2 = 4$ (ytan i uppg. 1) och $K_r : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$.
Bestäm den största radien R så att $Y \cap K_r = \emptyset$ för alla $r < R$. (7p)

7. a) Vad menas med att en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt (a, b) ? (2p)

b) Formulera och bevisa en sats om derivering av en sammansatt funktion $f(x(t), y(t))$. (7p)

8. Visa att om $\mathbf{IF} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är C^1 och virvelfritt i \mathbb{R}^3 så är kurvintegralen $\int_{\gamma} \mathbf{IF} \cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen i \mathbb{R}^3 . (7p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3,

36p – 47p ger betyget 4,

48p eller mer ger betyget 5

BB

spiralrampen i uppg. 2:

