Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 09-01-14

uppg. 1

Sätt $F(x,y,z) = x^2 + y^2 z + yz^2 - 4$. $F(2,1,-1) = 0$, punkten $(2,1,-1)$ ligger alltså på nivåytan $Y : F(x,y,z) = 0$.

$\operatorname{grad} F(x,y,z) = \left(2x, 2yz + z^2, 2yz + y^2\right) \overset{\text{i } (2,1,-1)}{=} (4,-1,-1)$,
tangentplanets ekvation är $0 = \operatorname{grad} F(2,1,-1) \bullet (x-2, y-1, z+1) =$
$= (4,-1,-1) \bullet (x-2, y-1, z+1) = 4x - 8 - y + 1 - z - 1 = 4x - y - z - 8$.

svar:

$\boxed{4x - y - z = 8}$

uppg. 2

$\boldsymbol{r}(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$.

$$\boldsymbol{r}'_t(t,\theta) \times \boldsymbol{r}'_\theta(t,\theta) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -t\sin\theta & t\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta, t),$$

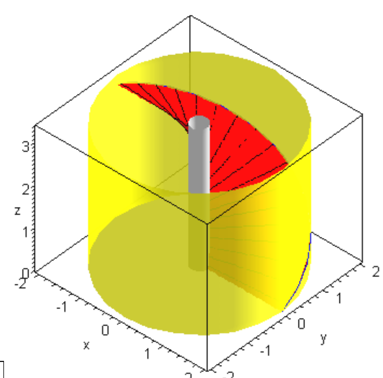
arean av ytan $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t,\theta)$, $(t,\theta) \in D = \left\{(x,y) : \frac{1}{2} \le t \le 2, 0 \le \theta \le \pi\right\}$ är

$$\iint_D \left|\boldsymbol{r}'_t(t,\theta) \times \boldsymbol{r}'_\theta(t,\theta)\right| dt d\theta = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + t^2}\, dt d\theta = (*)$$

$$= [\theta]_0^\pi \left[\tfrac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{2} =$$

$$= \tfrac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4}} - \ln\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \underline{\tfrac{\pi}{2}\left(\tfrac{7\sqrt{5}}{4} + \ln\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}.$$

(*) Integralen $\int \sqrt{1+t^2}\,dt$ beräknas t.ex. med p.i.:
$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt \ldots$,
[eller med subst. $t = \sinh x$, eller med subst. $t = \tan x$ ...]



$\boxed{\textbf{svar: } \frac{\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{5}}{4} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}$

uppg. 3

$f(x,y) = x^2 + y^2 + \tan(xy)$ och $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2\tan(xy)$ är C^1 i en en omgivning till origo. Enklaste lösningen fås med McLaurinutveckling ($\tan t = t + R_2(t)$, resttermen $R_2(t) = t^3 B(t)$, B en begränsad funktion):
$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + R_2(xy)$ och $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2R_2(xy)$.
Det visar att origo är en stationär punkt till f och till g (inga x-termer, dvs. första part. derivatorna är 0 i origo) och för f är
$Q(h,k) = f''_{xx}(0,0)h^2 + 2f''_{xy}(0,0)hk + f''_{yy}(0,0)k^2 = 2\left(h^2 + hk + k^2\right) =$
$= 2\left(\left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$, denna kvadratiska form är positivt definit, origo är således en (sträng) lokal minimimpunkt till f; för g är
$Q(h,k) = g''_{xx}(0,0)h^2 + 2g''_{xy}(0,0)hk + g''_{yy}(0,0)k^2 = 2\left(h^2 + 2hk + k^2\right) =$
$= 2(h+k)^2$, denna kvadratiska form är bara positivt semidefinit, men vi ser direkt att origo är en sadelpunkt till g, ty i varje omgivning $U_\delta : x^2 + y^2 < \delta^2$ till origo ligger punkter, t.ex. $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ och $\left(\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}\right)$ med $g\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 > g(0,0) = 0$ och $g\left(\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}\right) = 2\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \tan\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^2\right)\right) < g(0,0) = 0$ ty $\tan t > t$ (tan är str. konvex, dvs. $y = \tan t$ ligger strängt ovanför tangenten $y = t$ för $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).
Man kan även räkna ut det:

a) $\begin{cases} f'_x = 2x + y\left(1 + \tan^2(xy)\right) = 0 \\ f'_y = 2y + x\left(1 + \tan^2(xy)\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{grad} f(0,0) = (0,0),$

dvs origo är en stationär punkt till f.

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2 + 2y^2\tan(xy)\left(1 + \tan^2(xy)\right) \overset{\text{i origo}}{=} 2 \\ f''_{yy} = 2 + 2x^2\tan(xy)\left(1 + \tan^2(xy)\right) \overset{\text{i origo}}{=} 2 \\ f''_{xy} = 1 + \tan^2(xy) + 2xy\tan(xy)\left(1 + \tan^2(xy)\right) \overset{\text{i origo}}{=} 1 \end{cases}, \text{ det ger}$$

$Q(h,k) = 2\left(h^2 + hk + k^2\right)$ s.o..

b) $\begin{cases} g'_x = 2x + 2y\left(1 + \tan^2(xy)\right) = 0 \\ g'_y = 2y + 2x\left(1 + \tan^2(xy)\right) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \operatorname{grad} g(0,0) = (0,0),$

dvs origo är en stationär punkt till g.

$$\begin{cases} g''_{xx} = 2 + 4y^2\tan(xy)\left(1 + \tan^2(xy)\right) \overset{\text{i origo}}{=} 2 \\ g''_{yy} = 2 + 4x^2\tan(xy)\left(1 + \tan^2(xy)\right) \overset{\text{i origo}}{=} 2 \\ g''_{xy} = 2 + 2\tan^2(xy) + 4xy\tan(xy)\left(1 + \tan^2(xy)\right) \overset{\text{i origo}}{=} 2 \end{cases}, \text{ det ger}$$

$Q(h,k) = 2\left(h^2 + 2hk + k^2\right)$ s.o..

svar: **a)** lok. minimipunkt **b)** sadelpunkt

uppg. 4

$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \left(x^3 + xe^{xy} - z, xy - ye^{xy} + y^3 + z, -xz + y + z^3\right),$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + xe^{xy} - z & xy - ye^{xy} + y^3 + z & -xz + y + z^3 \end{vmatrix} =$$

$= \left(0, -1 + z, y - y^2e^{xy} - x^2e^{xy}\right);$

$\text{div}\boldsymbol{v}(x,y,z) = 3x^2+e^{xy}+xye^{xy}+x-e^{xy}-xye^{xy}+3y^2-x+3z^3 = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

a) $\boldsymbol{v}$ är ej konservativt i $\mathbb{R}^3$, ty $\boldsymbol{v}$ är C^1 och $\text{rot}\boldsymbol{v}(x,y,z) \neq (0,0,0)$ i $\mathbb{R}^3$ty $z \not\equiv 1$.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{d\boldsymbol{x}} = \begin{vmatrix} 3x^2+e^{xy}+xye^{xy} & x^2e^{xy} & -1 \\ y-y^2e^{xy} & x-e^{xy}-xye^{xy}+3y^2 & 1 \\ -z & 1 & -x+3z^3 \end{vmatrix} \overset{\text{i origo}}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$ inversa funktionssatsen ger att

$\boldsymbol{v}$ är bijektivt lokalt i origo ($\boldsymbol{v}$ är C^1).

b) Sfären $S: x^2+y^2+z^2=1$ är randen till klotet $K: x^2+y^2+z^2 \leq 1$, med utåtriktat enhetsnormalfält $\boldsymbol{N}$ är då flödet ut ur K ($\boldsymbol{v}$ är C^1)

$$\iint\limits_S \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{N}dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint\limits_K \text{div}\boldsymbol{v}(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_K 3\left(x^2+y^2+z\right)^2 dxdydz =$$

[med rymdpolära koordinater $x = rcos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$]

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 \cdot r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi = 3\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\left[-\cos\pi\right]_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \underline{\frac{12\pi}{5}}.$$

svar: $\boxed{\textbf{a) } \boldsymbol{v} \text{ är bijektivt lok. i origo, ej konservativt} \quad \textbf{b) } \frac{12\pi}{5}}$

uppg. 5

$\mathbb{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{\sinh(x-y)-\cosh(x-y)}{\cosh(x-y)}, \frac{\cosh(x-y)-\sinh(x-y)}{\cosh(x-y)}\right)$,

$P(x,y) = \tanh(x-y) - 1 = -Q(x,y)$, $P'_y(x,y) = \frac{-1}{\cosh^2(x-y)} = Q'_x(x,y)$, det visar att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{F}$ är C^1 i $\mathbb{R}^2$) och det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi) = \left(\frac{\cos\varphi}{\varphi}, \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$, $\frac{\pi}{4} \xrightarrow{\varphi} 2\pi$ är då

$A = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$ där Φ är en potential till $\mathbb{F}$, $P_0 = \boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt{2}\pi}, \frac{4}{\sqrt{2}\pi}\right)$ och $P_1 = \boldsymbol{r}(2\pi) = \left(\frac{1}{2\pi}, 0\right)$. Beräkning av Φ:

$\Phi'_x = P(x,y) = \tanh(x-y) - 1$ ger $\Phi(x,y) = \ln(\cosh(x-y)) - x + f(y)$ och $\Phi'_y = Q(x,y) = -\tanh(x-y) + 1$ ger då $f'(y) = 1$, alltså $f(y) = y$ $(+c)$, alltså är $\Phi(x,y) = \ln(\cosh(x-y)) - (x-y)$ och

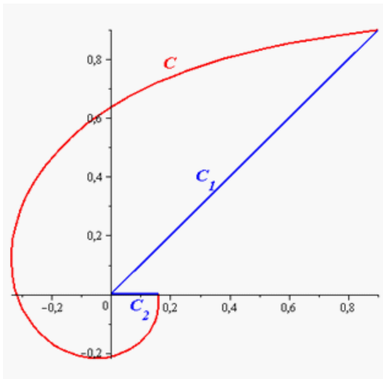
$A = \Phi\left(\frac{1}{2\pi}, 0\right) - \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{2}\pi}, \frac{4}{\sqrt{2}\pi}\right) = \underline{\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}}$.

Man kan även välja en annan (enklare) väg från P_0 till P_1, ty A är oberoende av vägen, t.ex. två sträckor (via origo): $C = C_1 + C_2$ där

$C_1: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (t,t)$, $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \xrightarrow{t} 0$ och $C_2: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (t,0)$, $0 \xrightarrow{t} \frac{1}{2\pi}$:

$$A = \int_{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}}^{0} ((0-1)+(1-0))\,dt + \int_0^{\frac{1}{2\pi}} ((\tanh t - 1) + 0)\,dt = \left[\ln(\cosh t) - t\right]_0^{\frac{1}{2\pi}} =$$

$= \ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right) - \frac{1}{2\pi}$ s.o..



Man kan t.o.m. räkna ut A direkt: $A =$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi}\left(\left(\tanh\left(\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi}\right)-1\right)\cdot\left(\frac{\cos\varphi}{\varphi}\right)'+\left(1-\tanh\left(\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi}\right)\right)\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)'\right)d\varphi=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi}\left(\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)'-\left(\frac{\cos\varphi}{\varphi}\right)'+\tanh\left(\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi}\right)\left(\left(\frac{\cos\varphi}{\varphi}\right)'-\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)'\right)\right)d\varphi=$$

$$=\left[\frac{\sin\varphi}{\varphi}-\frac{\cos\varphi}{\varphi}+\ln\left(\cosh\left(\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi}\right)\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}+\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right)\quad \text{s.o.}$$

[ty $\left(\frac{\cos\varphi}{\varphi}\right)'-\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)'=\left(\frac{\cos\varphi-\sin\varphi}{\varphi}\right)'$].

svar: $\boxed{\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right)-\frac{1}{2\pi}}$

uppg. 6

Vi sätter $Y: F(x,y,z)=x^2+y^2z+yz^2-4=0$ och $K_r: x^2+y^2+z^2\le r^2$. Först observerar vi att t.ex. $K_1\cap Y=\emptyset$ (ty $\left|x^2+y^2z+yz^2\right|\le 1+1+1=3<4$) och att $K_r\cap Y\ne\emptyset$ för (t.ex.) $r\ge\sqrt{2}$ (ty t.ex. $(2,0,0)\in K_r\cap Y$). Vi skall nu visa att det finns ett minsta R så att $K_R\cap Y\ne\emptyset$ och beräkna detta R (då är $K_r\cap Y=\emptyset$ för alla $r<R$), dvs. vi skall lösa problemet:
Bestäm det minsta värde som funktionen $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ antar under bivillkoret $F(x,y,z)=x^2+y^2z+yz^2-4=0$.
Eftersom f är C^0 så antar f ett minsta (och ett största) värde på (t.ex.) den kompakta mängden $K_{\sqrt{2}}\cap Y$ (F är C^0, Y alltså sluten). Vi ger två lösningar:

<u>**Lösning 1**</u> (med Lagrange, f och F är C^1):

$$\text{grad}F(x,y,z)=\left(2x,2yz+z^2,2yz+y^2\right)=(0,0,0)\iff\begin{cases}x=0\\2yz=-z^2=-y^2\end{cases}$$

$\Longrightarrow\ y=\pm z\ \Longrightarrow\ \left(y^2=0 \text{ eller } 3y^2=0\right)$, altså $x=y=z=0$, men $F(0,0,0)\ne 0$, då gäller alltså i lokala extrempunkter $\text{grad}f=\lambda\text{grad}F$ dvs.

$$\begin{cases}2x=\lambda 2x\\2y=\lambda\left(2yz+z^2\right)\\2z=\lambda\left(2yz+y^2\right)\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=0 \text{ eller } \lambda=1\\2(y-z)=\lambda\left(z^2-y^2\right)=\lambda(z-y)(z+y)\end{cases}.$$

fall 1.1: $y = z$ och $x = 0$:

bivillkoret ger $2y^3 = 4$ och kandidaten $\underline{\left(0, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)}$, $f\ \left(0, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right) = \underline{2\sqrt[3]{4}}$.

fall 1.2: $y = z$ och $x \neq 0$: då är $\lambda = 1$ alltså $2y = 3y^2$, dvs. $y = 0$ eller $y = \frac{2}{3}$.

$y = 0$: bivillkoret ger kandidaterna $\underline{\pm (2, 0, 0)}$, $f\ (2, 0, 0) = \underline{4} > 2\sqrt[3]{4}$.

$y = \frac{2}{3}$: bivillkoret ger $x^2 = 4 - 2y^3 = 4 - \frac{16}{9 \cdot 3}$ och $f(x, y, z) = 4 - \frac{16}{27} + 2 \cdot \frac{4}{9} =$ $= 4 + \frac{24-16}{27} > 4$. Alltså minsta värdet hittills $2\sqrt[3]{4}$.

fall 2.1: $y \neq z$ (då är $-2 = \lambda(y + z) \neq 0$!) och $x = 0$:

$2y = \lambda\left(2yz + z^2\right) \implies 2y = -\frac{2}{y+z}\left(yz + z(y + z)\right) \implies$

$y(y + z) = -yz - z(y + z) \implies -yz = (y + z)^2$.

Bivillkoret ger $yz(y + z) = -(y + z)^3 = \frac{8}{\lambda^3} = 4 \implies \lambda = \sqrt[3]{2}$ och funktionsvärdena är då $0 + y^2 + z^2 = (y + z)^2 - 2yz = 3(y + z)^2 = 3 \cdot \frac{4}{\lambda^2} =$ $= 3 \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{4}} = 6\sqrt[3]{2} > 2\sqrt[3]{4}$ (ty $3 > \sqrt[3]{2}$).

fall 2.2: $y \neq z$ och $x \neq 0$: då är $\lambda = 1$ och $-2 = y + z$:

$2y = yz + z(y + z) = yz - 2z \implies yz = 2(y + z) = -4$,

bivillkoret ger $x^2 = 4 - yz(y + z) = 4 - 8$: går ej.

Minsta värdet är alltså $2\sqrt[3]{4} = R^2$, dvs. $\underline{R = \sqrt{2\sqrt[3]{4}} = 2^{\frac{5}{6}}}$.

Lösning 2: Vi eliminerar x (bivillkoret ger $x^2 = 4 - y^2z - yz^2$):

Bestäm det minsta värde som $h(y, z) = 4 - y^2z - yz^2 + y^2 + z^2$ antar på området $D = \left\{(y, z) : y^2z + yz^2 \leq 4\right\}$ (leder till liknande räkningar som ovan):

I. Inre punkter:

$$\begin{cases} h'_y = 2y - 2yz - z^2 = 0 \\ h'_z = 2z - 2yz - y^2 = 0 \end{cases} \implies 2(y - z) = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y).$$

fall 1: $y = z$: $2y - 3y^2 = 3y\left(\frac{2}{3} - y\right) = 0$ ger kandidaterna $(0, 0)$ och $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

($\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ inre punkt i D ty $y^2z + yz^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 4$).

fall 2: $y \neq z$: då är $\underline{-2 = y + z}$, $2y - 2yz - z^2 = 2y - yz - z(y + z) = 0 \implies$ $\underline{yz = -4}$,men sådana punkter ligger inte i D ty $yz(y + z) = 8 > 4$.

II. Randpunkter:

Sök minsta värdet av $h(y, z) = y^2 + z^2$ under bivillkoret
$g(y, z) = y^2z + yz^2 - 4 = 0$:

grad$g(y, z) \neq (0, 0)$ (s.o. grad$F \neq (0, 0, 0)$, $x = 0$!), alltså gäller i lokala extrempunkter grad$h = \lambda$grad$g$ dvs.

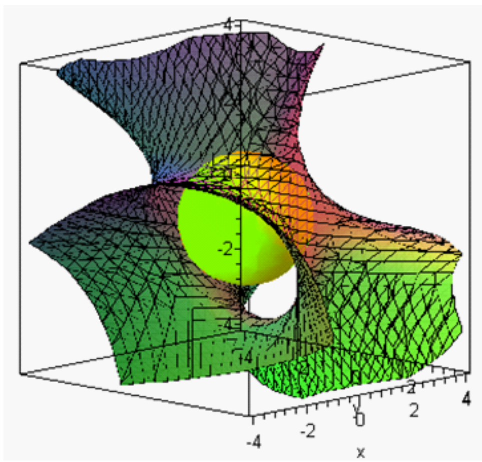
$$\begin{cases} 2y = \lambda\left(2yz + z^2\right) \\ 2z = \lambda\left(2yz + y^2\right) \end{cases} \implies 2(y - z) = \lambda(z - y)(z + y).$$

fall 1:$y = z$: bivillkoret ger $y = \sqrt[3]{2}$ och $h\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right) = 2\sqrt[3]{4}$.

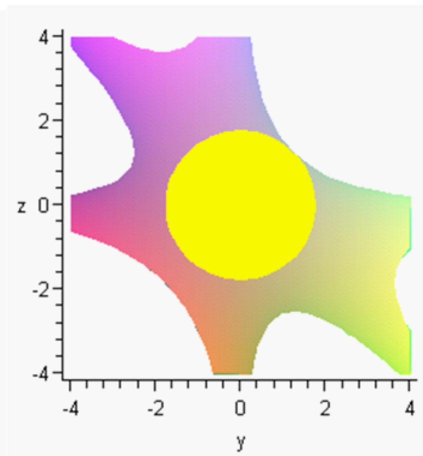
fall 2:$y \neq z$: då är $-2 = \lambda(y + z)$ och $2y = -\frac{2}{y+z}\left(yz + z(y + z)\right) \implies$ $(y + z)^2 = -yz \underset{\text{bivillkor, se lösn.1}}{\implies} \lambda = \sqrt[3]{2}$ och $y^2 + z^2 = (y + z)^2 - 2yz =$ $= 3(y + z)^2 = 3 \cdot \frac{4}{\lambda^2} > 2\sqrt[3]{4}$.

$\boxed{\textbf{svar}: R = \sqrt{2\sqrt[3]{4}} = 2^{\frac{5}{6}}}$ se figurerna på nästa sida:

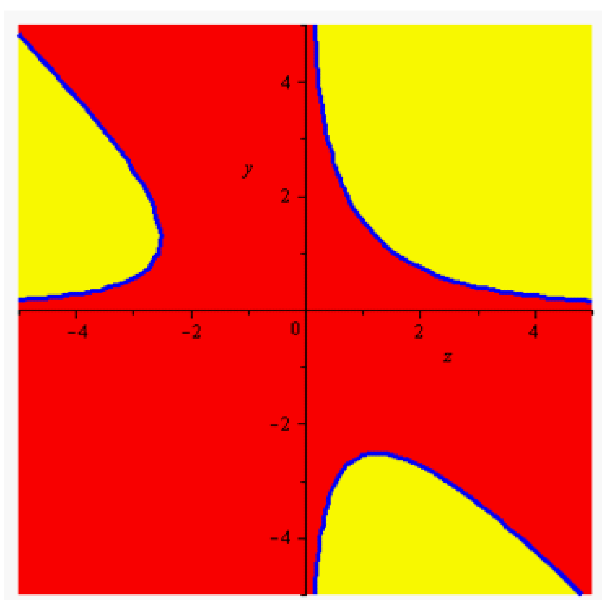
"Beröringspunkten" är $K_{2^{\frac{5}{6}}} \cap Y = \{(0, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})\}$.



Ytan med klotet



Projektion i yz-planet



området D i lösn.2 (rött)