Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 08-03-14

uppg. 1

$F(x,y,z) = xyz - \sin(x^2 - z^2) - \cos(y^2 - z^2)$, $F(1,1,1) = 0$, punkten $(1,1,1)$ ligger alltså på nivåytan $F(x,y,z) = 0$; F är C^1.

a) $F'_x = yz - 2x\cos(x^2 - z^2)$,
$F'_y = xz + 2y\sin(y^2 - z^2)$,
$F'_z = xy + 2z(\cos(x^2 - z^2) - \sin(y^2 - z^2))$
$\Rightarrow$ grad$F(1,1,1) = (-1,1,3)$. Tangentplanet har ekvationen

grad$F(1,1,1) \bullet (x-1, y-1, z-1) = -x + 1 + y - 1 + 3z - 3 = 0$
dvs. $\underline{x - y - 3z = -3}$.

b) $F'_z(1,1,1) = 3 \neq 0$, implicita funktionssatsen ger då att nivåytan $F(\boldsymbol{x}) = 0$ lokalt kring punkten $(1,1,1)$ är en C^1 funktionsyta $z = f(x,y)$;
derivering m.a.p. x (i en omgivning till $(1,1,1)$) ger
$F'_x(x,y,f(x,y)) \cdot 1 + F'_y(x,y,f(x,y)) \cdot 0 + F'_z(x,y,f(x,y)) \cdot f'_x(x,y) = 0$,
alltså $\underline{f'_x(1,1)} = -\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)} = \underline{\frac{1}{3}}$.

$$\boxed{\textbf{svar: a) } x - y - 3z = -3 \quad \textbf{b) } \tfrac{1}{3}}$$

uppg. 2

Arean av $Y : z = f(x,y), (x,y) \in D$ är $m(Y) = \iint\limits_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\,dxdy$;
här är $D : -x \le y \le x,\ 0 \le x \le \sqrt{2}\ln 2$ och $f(x,y) = \cosh\frac{x-y}{\sqrt{2}}$, alltså

$$\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{2}\sinh^2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\sinh^2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) + 1} = \underbrace{\cosh\frac{x-y}{\sqrt{2}}}_{>0} \text{ och}$$

$$\underline{m(Y)} = \int_0^{\sqrt{2}\ln 2}\left(\int_{-x}^{x}\cosh\frac{x-y}{\sqrt{2}}dy\right)dx = \int_0^{\sqrt{2}\ln 2}\left[-\sqrt{2}\sinh\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right]_{y=-x}^{y=x}dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}\ln 2}\sqrt{2}\sinh(\sqrt{2}x)\,dx = \left[\cosh(\sqrt{2}x)\right]_0^{\sqrt{2}\ln 2} = \cosh(2\ln 2) - 1 =$$

$$= \frac{4 + \frac{1}{4}}{2} - 1 = \underline{\frac{9}{8}}. \qquad \boxed{\textbf{svar: } \tfrac{9}{8}}$$

uppg. 3

Vi sätter $f(x,y) = x^3 + y^2$ och $D : 3x^2 + 2y^2 \le 4$ (en ellipsskiva).
f är kontinuerlig och D kompakt, f antar alltså på D ett minsta värde och ett största värde och måsta göra det i en inre punkt (=stationär punkt, ty f är

partiellt deriverbar i det inre av D) eller i en randpunkt:

I. Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$, dvs. $(0,0)$ är enda stationära punkten.

II. Randpunkter:

Lösning 1: med Lagrange:
Sök det största/minsta värde som f antar under bivillkoret
$g(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4 = 0$:
$\mathrm{grad}g(x,y) = (6x, 4y) \neq (0,0)$ på ellipsen ∂D, alltså löser extrempunkter
$\mathrm{grad}f = \lambda \mathrm{grad}g$, dvs det finns λ_0 så att

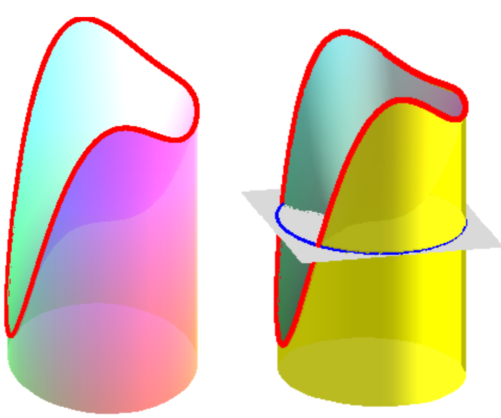
$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \ 3x^2 = \lambda_0 6x \\ (2)\ \ 2y = \lambda_0 4y \end{array}\right\} \underset{2y\cdot(1)-3x\cdot(2)}{\Longrightarrow} 6x^2y - 6xy = 6xy(x-1) = 0,$$ det ger 3 fall:

$y = 0$ eller $x = 0$ eller $x = 1$, ur bivillkoret fås då kandidaterna
$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$, $(0, \pm\sqrt{2})$ och $\left(1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Minsta/största värdet finns alltså bland
$f(0,0) = 0$, $f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) = \pm\frac{8}{3\sqrt{3}}$, $f(0,\pm\sqrt{2}) = 2$ och $f\left(1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$,
det minsta värde är $-\frac{8}{3\sqrt{3}}$, det största värdet är 2 (ty $\frac{3}{2} < \frac{8}{3\sqrt{3}} < 2$), alltså är
$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{-8}{3\sqrt{3}}\right)$ den lägsta punkten och $(0, \pm\sqrt{2}, 2)$ de högsta punkterna på Y.

Lösning 2: med parametrisering av $\partial D : x = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$:
Bestäm max/min av $h(t) = (x(t))^3 + (y(t))^2 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\cos^3(t) + 2\sin^2(t)$ på $[0, 2\pi]$:
För $0 < t < 2\pi$ är $h'(t) = -\frac{8}{\sqrt{3}}\cos^2(t)\sin(t) + 4\sin(t)\cos(t) =$
$= \frac{8}{\sqrt{3}}\cos(t)\sin(t)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(t)\right) = 0$ då $\cos t = 0$ eller $\sin t = 0$ eller $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
tillsammans med randpunkterna ($t \in \{0, 2\pi\}$) ger det samma kandidater s.o.!

Lösning 3: Bestäm max/min av $g(x) = x^3 + \frac{4-3x^2}{2}$, $-\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$:
kandidater är $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ och $x = 0$, $x = 1$ (nollställen av g').

svar: $\boxed{\text{lägst:}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)\ \text{högst:}\ (0, \pm\sqrt{2}, 2)}$



uppg. 4

$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) = (yz, xy, x+y+z)$, $\boldsymbol{F}$ är C^1.

a) $\boldsymbol{F}$ är ej lokalt bijektiv i origo, ty i varje omgivning $x^2+y^2+z^2 < \varepsilon^2$ till origo ligger olika punkter som avbildas på samma bildpunkt, t. ex. är
$\boldsymbol{F}\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0, -\frac{\varepsilon}{2}\right) = \boldsymbol{F}(0,0,0) = (0,0,0)$!
Men $\boldsymbol{F}$ är lokalt bijektiv i $(1,1,1)$ enligt inversa funktionssatsen, ty $\boldsymbol{F}$ är C^1 och

$$\frac{d(F_1,F_2,F_3)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 0 & z & y \\ y & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{i } (1,1,1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

b) $\text{rot}\boldsymbol{F} = (1, ..., ...) \neq (0,0,0) \implies \boldsymbol{F}$ har ej en potential i $\mathbb{R}^3$
($\boldsymbol{u}$ C^1, $\boldsymbol{u} = grad\Phi \implies rot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$);
$\text{div}\boldsymbol{F} = 0 + x + 1 \neq 0 \implies \boldsymbol{F}$ har ej en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$
($\boldsymbol{u}$ C^1, $\boldsymbol{u} = rot\boldsymbol{A} \implies \text{div}\boldsymbol{u} = 0$).

c) Vi använder Stokes sats: $\int\limits_C \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{r} = \iint\limits_Y rot\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{n} dS$ där Y är den orienterade ytan $z = x^3 + y^2$ med rand $\partial Y = C$:
med x, y som parametrar och $D : 3x^2 + 2y^2 \leq 4$ (se uppg. 3) blir ($\boldsymbol{n}$ uppåt!)

$$\underline{\iint\limits_Y rot\boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{n} dS} = \iint\limits_D (1, y-1, y-z) \bullet \left(-3x^2, -2y, 1\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left(-3x^2 - 2y^2 + 2y + y - \left(\left(x^3+y^2\right)\right)\right) dxdy =$$

$$\left[\text{med pol. koord.:} \quad \begin{matrix} x = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\varphi \;, 0 < r \leq 2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} r\sin\varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi \end{matrix} \;, \; \frac{d(x,y)}{d(r,\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{6}} r\right] =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \left(-r^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} r\sin\varphi - \frac{1}{3\sqrt{3}} r^3 \cos^3\varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin^2\varphi\right) \frac{1}{\sqrt{6}} r dr =$$

$$\left[\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi = 0, \; \int\limits_0^{2\pi} \cos^3\varphi d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\left(1 - \sin^2\varphi\right) d\varphi = \left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = 0,\right.$$

$$\left.\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int\limits_0^2 \left(-r^3 2\pi - \frac{1}{2} r^3 \pi\right) dr = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \left[-\frac{5}{4} r^4\right]_0^2 = \underline{-\frac{10\pi}{\sqrt{6}}}.$$

ANM: Kurvintegralen kan beräknas direkt:
$\int\limits_C \boldsymbol{F}\bullet d\boldsymbol{r} = \int\limits_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int\limits_0^{2\pi} (....) dt$ [med parametriseringen
$C : x = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t, \; y = \sqrt{2} \sin t, \; 0 \xrightarrow{t} 2\pi$], det leder till lösbara integraler (de flesta $= 0$: cos, sin över en hel period), men det är för mycket att skriva ut...

uppg. 5

div$\left(e^{x\sin z} - xy\cos z e^{y\sin z}, 3xy^2z^2 - y\sin z e^{x\sin z}, (1-2xy)\,z^3 + e^{y\sin z}\right) =$
$= \sin z e^{x\sin z} - y\cos z e^{y\sin z} + 6xyz^2 - \sin z e^{x\sin z} + 3\,(1-2xy)\,z^2 + y\cos z e^{y\sin z} =$
$= 3z^2$. För att kunna använda Gauss (alla förutsättningarna är uppfyllda) lägger vi till bottenytan $D : |x| + |y| \leq a$, då är $\partial K = Y \cup D$ där Y är pyramidens sneda sidor och $\underbrace{\iint\limits_{\partial K} \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS}_{\boldsymbol{n} \text{ ut ur } K} = \underbrace{\iint\limits_{Y} \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS}_{\boldsymbol{n} \text{ uppåt}} + \underbrace{\iint\limits_{D} \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS}_{\boldsymbol{n}=(0,0,-1)} =$

$$= \iiint\limits_K 3z^2 dxdydz = [\text{pga symmetri}] = 4 \iiint\limits_{K_+} 3z^2 \; dxdydz$$

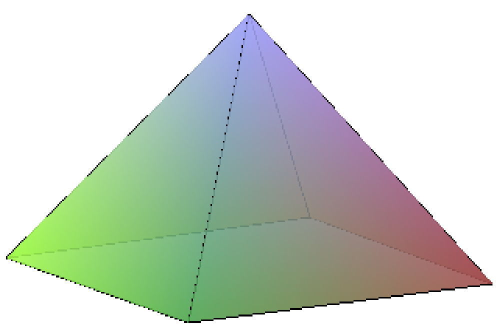
där $K_+ = \{(x, y, z) \in K : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, alltså är

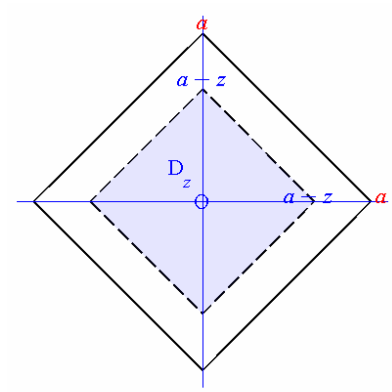
$$\underline{\iint\limits_Y \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{n} dS} = 4 \iint\limits_{D_+} \left(\int\limits_0^{a-x-y} 3z^2 dz \right) dxdy - \iint\limits_D \boldsymbol{v} \bullet (0, 0, -1)\, dS =$$

$$\left[D_+ : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a - x \end{cases}, \quad \begin{matrix} \text{pyramidsidan är planet} \\ x + y + z = a, \; (x, y) \in D_+ \end{matrix} \right] =$$

$$= 4 \iint\limits_{D_+} (a - x - y)^3 \, dxdy + \iint\limits_D (1 - xy, 0, 1) \bullet (0, 0, 1)\, dS =$$

$$= 4 \int\limits_0^a \left(\int\limits_0^{a-x} (a - x - y)^3 \, dy \right) dx + \iint\limits_D dS = \int\limits_0^a (a - x)^4 \, dx + m\,(D) = \underline{\tfrac{a^5}{5} + 2a^2}.$$





$$\text{Eller} \iiint\limits_K 3z^2 \; dxdydz = \int\limits_0^a \left(\iint\limits_{D_z} 3z^2 dxdy \right) dz =$$

$$\left[D_z : |x| + |y| \leq z, \; \iint\limits_{D_z} dxdy = m\,(D_z) = 2\,(a - z)^2 \right]$$

$$= \int\limits_0^a 6z^2 (a - z)^2 \, dz = 6 \int\limits_0^a \left(a^2z^2 - 2az^3 + z^4\right) dz =$$

$$= 6 \left(a^2 \tfrac{a^3}{3} - 2a \tfrac{a^4}{4} + \tfrac{a^5}{5} \right) = 6a^5 \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} \right) = \underline{\tfrac{a^5}{5}}.$$

$$\boxed{\textbf{svar: } 2a^2 + \tfrac{a^5}{5}}$$