

Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2006-02-11

kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosor

Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Bevisa att ekvationen $x + xy + yz = 2 \sin(x) + 3 \sin(y) + 2 \sin(z)$ definierar lokalt i origo z som en C^1 funktion av (x, y) och ange en ekvation för tangentplanet till denna yta $z = z(x, y)$ i origo. (6p)

2. Låt
$$\begin{cases} u = z - x \\ v = z - y \\ w = z^4 - 2xz^3 - 2yz^3 + 6xyz^2 \end{cases}$$
 och $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

a) Bevisa att $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är bijektiv lokalt i varje punkt i Ω . (3p)
 $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$

b) Bestäm den allmänna lösningen till problemet $f'_x + f'_y + f'_z = xyz$, $(x, y, z) \in \Omega$.
[ledning: använd u, v, w som nya variabler] (7p)

3. Låt $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;
bevisa att f är differentierbar (4p) men inte C^1 i $(0, 0)$ (3p). (7p)

4. Bevisa att om $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är C^1 i en omgivning till $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ så är f differentierbar i (a, b) . (7p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng
14p – 20p: 2 bonuspoäng
21p – 27p: 3 bonuspoäng
28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Övningskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2007-02-17

kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Låt $f(x, y) = x + y + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$.
- a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(-1, -1, -1)$. (4p)
- b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (6p)

2. Låt $u = y + \cosh x$, $v = y - \sinh x$.
- a) Visa att tillordningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i \mathbb{R}^2 . (2p)
- b) Lös problemet $f'_x + \cosh x f'_y = e^x$, $f(x, 2 \sinh x) = \cosh x$. [använd u, v, \dots] (5p)
- c) Beräkna arean av det område i planet som begränsas av kurvorna $y = 6 - \cosh x$, $y = 3 - \cosh x$, $y = \sinh x - 1$ och $y = \sinh x + 1$. [använd u, v, \dots] (6p)

3. Låt $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{då } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ då } x = 0 \end{cases}$.

Visa att riktningsderivatan $f'_v(0,0)$ existerar för varje $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. (4p)

Gäller $f'_v(0,0) = \text{grad}f(0,0) \bullet \mathbf{v}$? (2p)

Är f differentierbar i $(0,0)$? (1p) (7p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng; 14p – 20p: 2 bonuspoäng; 21p – 27p: 3 bonuspoäng; 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2008-02-16

kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768-681630

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.

Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt $f(x, y) = 4 \cos(x) - 3xy + (\sin(x + y^2))^3 - 4 \sin(y^2)$.
- c) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(\frac{\pi}{2}, 0, 1)$. (4p)
- d) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess karaktär. (6p)
[ledning: McLaurinutveckla!]
2. Låt $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ och $\Omega = \{(x, y) : -x < y < x\}$.
- d) Visa att tillordningen $(x, y) \mapsto (u, v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i Ω . (2p)
- e) Lös problemet $xf'_x - yf'_y + (x^2 - y^2)f = 0$, $(x, y) \in \Omega$. [använd u, v, \dots] (4p)
3. Beräkna volymen $m(K)$ av pyramiden $K = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2 - |x + y| - |x - y|\}$ utan att använda formeln " $m(K) = \frac{1}{3}$ basyta \cdot höjd " (du skall alltså verifiera att formeln stämmer för K). (5p)

4. Låt $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{då } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{då } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
- Visa att f är C^1 men inte C^2 i origo (ledning: beräkna $f''_{xy}(0, 0)$ och $f''_{yx}(0, 0)$). (9p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng; 14p – 20p: 2 bonuspoäng; 21p – 27p: 3 bonuspoäng; 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

SVAR på övningstentorna:

06-02-11: 1a) $x + 3y + 2z = 0$	2b) $\frac{1}{12}(z^4 - 2(x+y)z^3 + 6xyz^2) + g(z-x, z-y)$
07-02-17: 1a) $2x + 2y - z + 3 = 0$	b) (1,1) str. lokal maximipunkt
2b) $2 \sinh x + \cosh x - y$	c) $7 \ln 7 - 5 \ln 5 - 6 \ln 2$
3) $f'_v(0, 0) = \text{grad } f(0, 0) \cdot \mathbf{v}$	gäller inte (för godt. \mathbf{v}), f är inte C^1 i (0,0)
08-02-16: 1a) $8x + 3\pi y + 2z = 2 + 4\pi$	b) origo är en lokal maximipunkt
2b) $f(x, y) = g(xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$	3) $\frac{8}{3}$

(ÖVNINGS-) TENTAUPPGIFTER

1. Låt $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Visa att f är kontinuerlig i $(0,0)$ (1p), partiellt deriverbar i $(0,0)$ (3p), men inte differentierbar i $(0,0)$ (5p) (9p)

2. Låt $F(x, y, z) = x^4 + y^2 - z^3$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x, y, z) = 1$ i punkten $(1, 1, 1)$. (4p)

b) I vilken riktning växer funktionsvärdena snabbast i punkten $(1, 1, 1)$? (2p)

3. Låt $f(x, y) = \cosh(x - y^2) + \sin(x^2 - y)$.

a) Bestäm en normalvektor till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 1)$. (4p)

b) Bestäm en ekvation för normalen till nivåkurvan $f(x, y) = 1$ i punkten $(1, 1)$. (3p)

4. Given är ytan $z = 1 + \ln(1 + x^2 + y^2)$.

a) Bestäm ytans nivåkurvor. (2p)

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan i punkten $(1, -2, 1 + \ln 6)$. (5p)

5. Lös för $x > 0, y > 0$ problemet $xf'_x - yf'_y = x + y, f(x, x) = \cosh x$ genom att införa nya variabler $u = xy, v = x - y$. Duger u, v som nya variabler? (7p)

6. Låt $f(x, y) = 3 \ln \sqrt{x^2 + y^2 + 1} + xy - x^2 - y^2$.

a) Taylorutveckla f kring origo med termer till och med fjärde graden och visa med hjälp härav att origo är en sadelpunkt till f . (7p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (7p)

svar: 2a) $4x + 2y - 3z = 3$ b) $(4, 2, -3)$; 3a) $(2, -1, -1)$ b) $x + 2y = 3$; 4a) $x^2 + y^2 = k$ ($k \geq 0$)

b) $x - 2y - 3z = 2 - 3 \ln 6$; 5) $f(x, y) = x - y + \cosh(\sqrt{xy})$; 6a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + xy - \frac{3}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{3}{4}y^4$

b) $(0, 0)$ sadelpunkt, $\pm(1, 1)$ globala maximipunkter