INSTUDERINGSUPPGIFTER

- Dessa uppgifter skall hjälpa dig vid inlärningen, de skall fungera som ett slags diagnostiskt prov: (hur bra) kan du redan det vi har gått igenom den gångna veckan? Försök först att lösa uppgifterna hemma ("hemmauppgifter" på schemat), skriv ner dina lösningar på ett bra sätt, ta med dem till räknestugan och diskutera dem i smågrupp: är lösningen korrekt? fullständig? bra nerskriven? omständlig? är alla använda begrepp/satser klara?
  Det viktigaste är inte att du har en korrekt lösning utan att du jobbar med uppgifterna! Diskutera även föreläsningarna, repetitionsfrågorna (de liknar teorifrågorna på tentan) och extraövningarna. Utnyttja övningsledaren!
- Tänk på att du måste träna att formulera dig, att skriva ner en lösning på ett acceptabelt sätt. Uppgifterna är eller liknar tenta-uppgifter.
- Gå igenom de medföljande lösningarna (kritiskt), men först **efter** det att du har försökt.

Instuderingsuppgift 1 (derivata, gradient)

a) Är funktionen $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{xy^2}, & \text{då } xy\neq 0\\ 0, & \text{då } xy=0\end{cases}$ partiellt deriverbar resp. differentierbar i origo?

b) Låt $F(x,y,z)=\sin\left(ye^x\right)+e^{x+2y+4z}$.

I vilken riktning avtar F snabbast i origo?
Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan Y: $F(x,y,z)=1$ i origo, först direkt (med F), sedan genom att beskriva Y som en funktionsyta $z=f(x,y)$ nära origo.

Instuderingsuppgift 2 (kedjeregel, invers fkt.)

a) Låt $u=\arctan(xy)$, $v=\dfrac{x}{y}$ för $(x,y)\in D=\{(x,y):x>0,y>0\}$.

Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i D.

b) Bestäm för $(x,y)\in D=\{(x,y):x>0,y>0\}$ en lösning $z(x,y)$ till problemet $(DE): xz'_x - yz'_y = 2$ och $z(x,x)=x^2$

b1) genom att övergå till koordinaterna u,v från **a)**

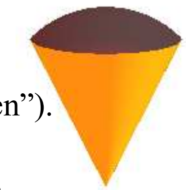
b2) genom att bestämma en karakteristisk koordinat till (DE) (lv7).

Instuderingsuppgift 3 (max-min-problem)

a) Bestäm alla stationära punkter till $f(x,y)=\ln|2x-1|+\ln|y|+xy-x$ och deras karaktär.

b) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y)=\dfrac{1+2x+2y}{1+x^2+y^2}$, $D_f=\mathbb{R}^2$.

Instuderingsuppgift 4 (dubbelintegral, trippelintegral)



a) Beräkna volymen av den kropp som begränsas nedåt av konen $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ och uppåt av sfären $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$ (“glassmängden”).

b) Beräkna $\iint_D \frac{e^{2x}}{y(e^{2x}+1)}\,dxdy$, då D är det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $y = 2e^{-x}$, $y = 3e^{-x}$, $y = \cosh x$ och $2y = \cosh x$.

c) Beräkna volymen av kroppen $\left\{(x,y,z): -y \le x \le y \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1\right\}$.

d) Beräkna den totala massan av kroppen $\left\{(x,y,z): 0 \le y \le 2 - z \le x \le 2\right\}$ då dess densitet är $\rho(x,y,z) = \dfrac{x+y}{2x+y+z-2}$.

e) Beräkna $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{1+\left(x^2+2y^2+3z^2\right)^3}\,dxdydz$.

Instuderingsuppgift 5 (vektoranalys i planet)

a) Låt $\mathbb{F} = \left(\dfrac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}, \dfrac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right)$.

Visa att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^2$ och beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs spiralen $C: \begin{cases} x = \sqrt{e^{-t}}\cos t \\ y = \sqrt{e^{-t}}\sin t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} 3\pi$.

b) Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx - \arctan\frac{y}{x}\,dy$ där C är den positivt orienterade randen till det område i första kvadranten som begränsas av kurvorna $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$.

Instuderingsuppgift 6 (vektoranalys i rummet)

A) Låt $\mathbb{F} = \left(2x+2xy, x^2+2yz, y^2+3z^2\right)$.

a) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ bort från origo genom ytan $x = \sqrt{4-y^2-z^2}$, $x \ge 0$.

b) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

c) Visa att $\mathbb{F}$ är ett konservativt och bestäm en potential till $\mathbb{F}$.

d) Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$, där $C: t \mapsto \left(\frac{1}{2}\left(t^3+t\right), \frac{1}{2}\left(t^2+t\right), \frac{1}{8}\left(t^5-t^3\right)\right)$, $1 \xrightarrow{t} 2$.

B) Låt $\mathbb{F} = \left(y\cos\left(x^2+y^2+z^4\right)+ze^{x^2+y^2+z^2}, -x\cos\left(x^2+y^2+z^4\right), 1-xe^{x^2+y^2+z^2}\right)$.

a) Visa att $\mathbb{F}$ har en vektorpotential (utan att beräkna en sådan).

b) Bestäm en vektorpotential $(0, p(x,y,z), q(x,y,z))$ till $\mathbb{F}$.

c) Då kurvan $z = \arccos x$, $0 \le x \le 1$, roterar kring z–axeln uppstår en rotationsyta S; beräkna flödet av $\mathbb{F}$ uppåt genom S med Stokes sats, resp. utan Stokes sats.

EXTRAUPPGIFTER

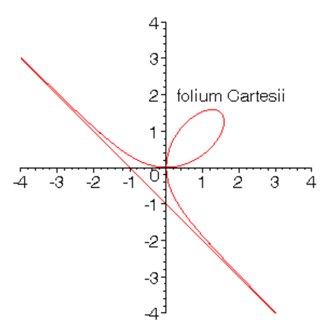
1. Visa att för positiva reella tal x, y, z gäller $xyz = a^3 \Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \ge (1+a)^3$.

2. Ett plåtkärl har formen av ett rätblock. Plåten i bottenytan kostar 2 öre/cm2 och i de övriga fem sidorna 1 öre/cm2. Vilka mått skall kärlet ha för att rymma maximal volym, då den totala plåtkostnaden uppgår till 36 öre?

3. I vilka punkter på ellipsoiden $Y:\ (x-y)^2 + 2y^2 + 4z^2 = 6$ är det elektriska fältet starkast, resp. svagast, då den elektriska potentialen i punkten (x,y,z) är $\Phi(x,y,z) = x^2 - \sqrt{2}y^2 + \sqrt{6}z^2$ (du skall alltså bestämma de punkter på Y i vilka $|-\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)|$ antar sitt största, resp. sitt minsta värde).

4. Kroppen K begränsas av xy-planet och ytan $z = 20 - 2x^2 - 3y^2$.
Genom K borras ett cylindriskt hål med z-axeln som borraxel och radien R.
Bestäm R så att den återstående kroppen har hälften så stor volym som K (bortborrad massa = kvarvarande massa).

5. Beräkna $\iint_D e^{xy-x^2-y^2}\,dxdy$ då D är första kvadranten i xy-planet.



6. För vilken enkel, sluten C^1-kurva C uträttar kraftfältet $\left(x^2y + y^3 - 12y, 24x - x^3 - 6xy^2\right)$ det största arbete, då en partikel förflyttas ett varv moturs längs C?

7. Beräkna arean av området inom öglan av kurvan

$$C:\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases},\ -1 \ne t \in \mathbb{R} \quad \text{(Descartes blad).}$$

8. Beräkna det arbete som kraftfältet $\left(2x+3y+xe^{x^2+y^2},\ 2x+3y+ye^{x^2+y^2}\right)$ uträttar då en partikel förflyttas från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ längs kurvan $y = \sin x$.

9. Beräkna $\iiint_\Omega (xy+yz+zx)\,dxdydz$, där $\Omega = \left\{(x,y,z) : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$
direkt resp. med Gauss' sats
[ledn: $xy+yz+zx = \frac{1}{2}\operatorname{div}(x^2y, y^2z, z^2x)$, eller $xy+yz+zx = \operatorname{div}(xyz, xyz, xyz)$].

10. Beräkna $\int_0^\pi \ln\left(1+3\sin^2 x\right)dx$ [ledn: visa att $\int_0^\pi \ln\left(1+p\sin^2 x\right)dx = 2\pi\ln\frac{1+\sqrt{1+p}}{2}$].

svar till extrauppgifterna:

2. $2cm \times 2cm \times 3cm$ **3.** störst i $\pm\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0\right)$, minst i $\pm(1,-1,0)$

4. $R = \sqrt{8 - \sqrt{64 - \frac{80}{\sqrt{6}}}}$ **5.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ **6.** ellipsen C: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

7. $\frac{3}{2}$ (hela lösningen finns på sid. 10) **8.** $2 + \pi^2 + \frac{1}{2}e^{\pi^2}$ **9.** 0.2

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 1

a) f är partiellt deriverbar i origo, ty $\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0 \to 0$ då $h \to 0$ och $\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \frac{0-0}{k} = 0 \to 0$ då $k \to 0$, alltså $f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$. Men f är ej kontinuerlig i origo, ty t.ex. går $f(x,x)$ ej mot $f(0,0) = 0$ då x går mot 0: $f(x,x) = \frac{\sin(x^3)}{x^3} \to 1$ då $(x,x) \to (0,0)$, det medför att f inte är differentierbar i origo, ty differentierbarhet medför ju kontinuitet!

b) Svaren fås med gradientvektorn:
$\text{grad}F(x,y,z) = \left(ye^x\cos\left(ye^x\right) + e^{x+2y+4z},\ e^x\cos\left(ye^x\right) + 2e^{x+2y+4z},\ 4e^{x+2y+4z}\right)$, alltså är $\text{grad}F(0,0,0) = (1,3,4)$ och vi får: F avtar snabbast i riktningen $\underline{-(1,3,4)}$ och tangentplanet har ekvationen $\text{grad}F(0,0,0) \bullet (x-0, y-0, z-0) = 0$, alltså $\underline{x + 3y + 4z = 0}$.

Vi kan också lokalt kring origo lösa ut z:
$e^{x+2y+4z} = 1 - \sin\left(ye^x\right) \Rightarrow z = \frac{1}{4}\left(\ln\left(1 - \sin\left(ye^x\right)\right) - x - 2y\right) = f(x,y)$ och tangentplanet fås nu som $z = f(0,0) + f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y$ där $\text{grad}f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\frac{-ye^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)} - 1,\ \frac{-e^x\cos\left(ye^x\right)}{1-\sin\left(ye^x\right)} - 2\right)$, alltså $\text{grad}f(0,0) = \frac{-1}{4}(1,3)$ och det ger samma svar som ovan.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 2

a) $\begin{vmatrix} u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y}{1+x^2y^2} & \frac{x}{1+x^2y^2} \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{-2x}{y\left(1+x^2y^2\right)} \neq 0$ och u,v är C^1 i D, inversa funktionssatsen ger påståendet.

b1) $xz_x' - yz_y' = x\left(z_u'u_x' + z_v'v_x'\right) - y\left(z_u'u_y' + z_v'v_y'\right) = \frac{xy-yx}{1+x^2y^2}z_u' + 2\frac{x}{y}z_v' = 2vz_v' \overset{!}{=} 2$, denna differentialekvation har den allmänna lösningen $z(u,v) = \ln v + g(u)$ (g en godt. C^1-funkt.), dvs. (back to x,y): $z(x,y) = \ln\frac{x}{y} + g(\arctan(xy)) = \ln x - \ln y + f(xy)$ (f en godt. C^1-funkt.). Nu skall $z(x,x) = f\left(x^2\right) = x^2$, det ger $f(t) = t$ och svaret $\underline{z(x,y) = \ln x - \ln y + xy}$.

b2) Karakteristikor till $(DE): a(x,y)z_x' + b(x,y)z_y' = c(x,y,z)$ är lösningar till $y' = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$:
$y' = \frac{-y}{x} \underset{\text{separabel diff.ekv.}}{\Rightarrow} \ln y = -\ln x + k \Rightarrow v = xy = \tilde{k}$; med $v = xy$ och t.ex. $u = x$ blir
$xz_x' - yz_y' = x\left(z_u' \cdot 1 + z_v' \cdot y\right) - y\left(z_u' \cdot 0 + z_v' \cdot x\right) = xz_u' = uz_u' \overset{!}{=} 2 \Rightarrow z(u,v) = 2\ln u + g(v)$, alltså
$z(x,y) = \ln x^2 + g(xy) \underset{z(x,x)=x^2}{\Rightarrow} g(t) = t - \ln t \Rightarrow \underline{z(x,y)} = \ln x^2 + xy - \ln(xy) = \underline{\ln x - \ln y + xy}$ (s.o.).

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 3

a) $\begin{cases} f'_x = \frac{2}{2x-1} + y - 1 = 0 & \Rightarrow \frac{2}{2x-1} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{3-2x}{2x-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1) = 0 \\ f'_y = \frac{1}{y} + x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{x} & \Uparrow \end{cases}$,

det ger de stationära punkterna $(1,-1)$ och $(-\frac{1}{2},2)$. Deras typ avgörs (ev.) m.h.a. den kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$: $f''_{xx} = \frac{-4}{(2x-1)^2}$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = \frac{-1}{y^2}$;

i punkten $(1,-1)$: $Q(h,k) = -4h^2 + 2hk - k^2 = -\left((k-h)^2 + 3k^2\right)$ är negativt definit,

i punkten $(-\frac{1}{2},2)$: $Q(h,k) = -h^2 + 2hk - \frac{1}{4}k^2 = -(h-k)^2 + \frac{3}{4}k^2$ är indefinit,

därmed är svaret: $\underline{(1,-1)}$: <u>lokal maximipunkt</u> och $\underline{(-\frac{1}{2},2)}$: <u>sadelpunkt</u>.

b) $\begin{cases} f'_x = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2x(1+2x+2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \\ f'_y = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2y(1+2x+2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$ (subtrahera!), det ger de stationära punkterna

$(-1,-1)$ och $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ med $f(-1,-1) = -1$ och $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2$. Om vi räknar med polära koordinater så ser vi att $0 \le |f(x,y)| = \frac{|1 + 2r\cos\varphi + 2r\sin\varphi|}{1+r^2} < \frac{1+4r}{r^2} < \frac{5}{r} \le 1$ då $r \ge 5$.

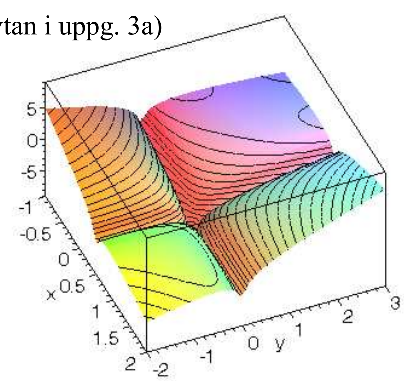
På den kompakta cirkelskivan $\Omega: x^2 + y^2 \le 25$ (t.ex.) antar den kontinuerliga funktionen f ett minsta och ett största värde (sats 4, sid. 41) och måste göra det i det inre av Ω (ty på randen är $|f| < 1$), alltså i en stationär punkt (ty f är C^1), men de enda möjliga punkterna är $(-1,-1)$ och $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (som vi visat ovan), alltså är -1 det minsta värde som f antar och 2 det största värde som f antar. Eftersom $\mathbb{R}^2$ är bågvis sammanhängande och f kontinuerlig så antar f även alla värden mellan -1 och 2 (s.o.m.v., sats 6 sid. 42). Svaret är därmed $\underline{V_f = [-1, 2]}$.

<u>**ANM**</u>.: I linjär algebra visas att för en kvadratisk form $Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ gäller:

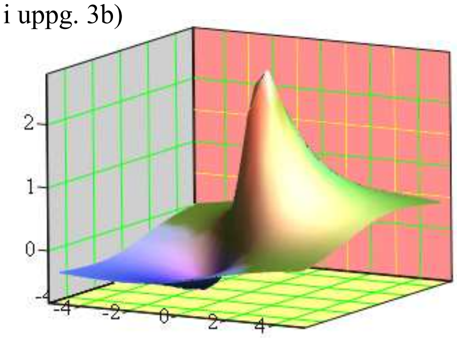
$$Q \text{ är } \begin{cases} \text{positivt definit} \\ \text{negativt definit} \\ \text{indefinit} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \begin{cases} > 0 \text{ och } A > 0 \\ > 0 \text{ och } A < 0 \\ < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{egenvärdena till} \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \text{är} \begin{cases} \text{alla } > 0 \\ \text{alla } < 0 \\ \text{ett} > 0, \text{ett} < 0 \end{cases}$$

[egenvärdena till $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ är rötterna till polynomet $\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix}$, det sista gäller för godt. dim.].

ytan i uppg. 3a)



ytan i uppg. 3b)



Lösningsförslag till instuderingsuppgift 4

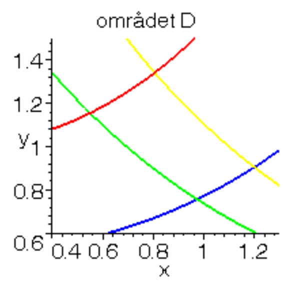
a) Beräkna först snittet mellan konen och sfären, antingen genom att sätta in $x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2$ (konen) i sfären, det ger $\frac{1}{4}z^2+(z-1)^2=2 \Rightarrow z^2-\frac{8}{5}z=\frac{4}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow z=2$, eller genom att sätta in $z=2\sqrt{x^2+y^2}=2r$ (konen) i sfären, det ger $r^2+(2r-1)^2=2 \Rightarrow r^2-\frac{4}{5}r=\frac{1}{5} \Rightarrow \cdots \Rightarrow r=1$.

Kroppen $K=\left\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ 2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right\}$, med $D: x^2+y^2\le 1$, har då volymen $m(K)=\iint_D \left(1+\sqrt{2-x^2-y^2}\right)dx\,dy-\iint_D\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=$ [pol. koord.]=

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(1+\sqrt{2-r^2}-2r\right)r\,dr\,d\varphi=2\pi\int_0^1\left(r+r\sqrt{2-r^2}-2r^2\right)dr=\pi\left[r^2-\tfrac{2}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{4}{3}r^3\right]_0^1=\underline{\tfrac{\pi}{3}\left(4\sqrt{2}-3\right)}.$$

b) Gör variabelsubstitutionen $\begin{cases}u=\frac{\cosh x}{y}\\ v=ye^x\end{cases}$, då avbildas D på $D':\begin{cases}1\le u\le 2\\ 2\le v\le 3\end{cases}$, funktionaldeterminanten

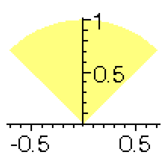
är $\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sinh x}{y} & \frac{-\cosh x}{y^2}\\ ye^x & e^x\end{vmatrix}=\frac{e^x}{y}(\sinh x+\cosh x)=\frac{e^{2x}}{y}=\frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(u,v)}}\quad(>0)$,



alltså blir $\iint_D \frac{e^{2x}}{y\left(e^{2x}+1\right)}dx\,dy=\iint_{D'}\frac{1}{e^{2x}+1}du\,dv=\left[e^{2x}+1=ye^x\,\frac{e^x+e^{-x}}{y}\right]=$

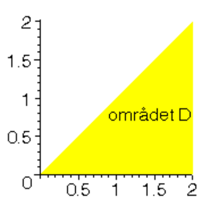
$$=\int_2^3\int_1^2\frac{1}{2vu}du\,dv=\tfrac{1}{2}\left[\ln v\right]_2^3\left[\ln u\right]_1^2=\underline{\tfrac{1}{2}\ \ln 2\ln\tfrac{3}{2}}.$$

c) Kroppens volym är $\iiint_K dxdydz=\iint_D\left(\int_y^{\sqrt{x^2+y^2}}dz\right)dxdy=\iint_D\left(\sqrt{x^2+y^2}-y\right)dxdy=$

området D: 

$$=[\text{pol. koord.}]=\int_0^1\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}r^2(1-\sin\varphi)\,d\varphi\,dr=\underline{\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)}.$$

d) Kroppens massa är $\iiint_K \rho(x,y,z)dxdydz=\iint_D\left(\int_{2-x}^{2-y}\frac{x+y}{2x+y+z-2}dz\right)dxdy=$



$$=\left[\int\frac{1}{2x+y+z-2}dz=ln\left|2x+y+z-2\right|\right]=\int_0^2\left(\int_0^x(x+y)(\ln 2x-\ln(x+y))\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left[\tfrac{1}{2}(x+y)^2(\ln 2x-\ln(x+y))+\tfrac{1}{4}(x+y)^2\right]_{y=0}^{y=x}dx=$$

$$=\int_0^2\left(x^2-\tfrac{\ln 2}{2}x^2-\tfrac{1}{4}x^4\right)dx\ =\underline{2-\tfrac{4\ln 2}{3}}.$$

e) Välj som uttömmande följd ellipsoiderna $K_n: x^2+2y^2+3z^2\le n^2$:

$$I_n=\iiint_{K_n}\frac{1}{1+\left(x^2+2y^2+3z^2\right)^3}dxdydz=\left[\text{med }\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ \sqrt{2}\,y=r\sin\theta\sin\varphi\\ \sqrt{3}\,z=r\cos\theta\end{cases}\text{ blir }K'_n:\begin{cases}0\le r\le n\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}\right]=$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{n} \tfrac{1}{1+r^6}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{6}}\, r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi = \tfrac{2\pi}{\sqrt{6}}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\tfrac{1}{3}\arctan\left(r^3\right)\right]_0^{n} = \tfrac{4\pi \arctan n^3}{3\sqrt{6}}$$, därmed fås

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \tfrac{1}{1+\left(x^2+2y^2+3z^2\right)^3}\, dxdydz = \lim_{n\to\infty} I_n = \underline{\tfrac{2\pi^2}{3\sqrt{6}}}.$$

svar: $\boxed{\dfrac{\sqrt{6}\,\pi^2}{9}}$

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 5

a) "Upptäck" att $\mathbb{F}$ är konservativt, antingen genom att visa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4xy+2y^3-y}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right) = \frac{4y\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)-\left(4x+2y^2-1\right)4y\left(2x+y^2\right)}{\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x+2y^2-1}{1+\left(2x+y^2\right)^2}\right),$$

eller genom att bestämma en potential Φ:

$$\Phi'_x = \frac{4x+2y^2}{1+\left(2x+y^2\right)^2} - \frac{1}{1+\left(2x+y^2\right)^2} \Rightarrow \Phi(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln\left(1+\left(2x+y^2\right)^2\right) - \tfrac{1}{2}\arctan\left(2x+y^2\right) + f(y),\ f \equiv 0 \text{ duger.}$$

Arbetet kan då beräknas som "potentialskillnaden"

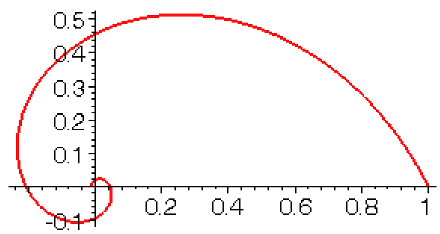
$$\Phi\left(-\sqrt{e^{-3\pi}},0\right) - \Phi(1,0) = \tfrac{1}{2}\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right) - \ln 5 + \arctan 2 + \arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right),$$

eller genom att välja en enklare väg ($\mathbb{F}$ är C^1 överallt), t.ex. sträckan längs x-axeln:

$y=0,\ x=t,\ 1 \xrightarrow{\ t\ } -\sqrt{e^{-3\pi}}$, arbetet är då

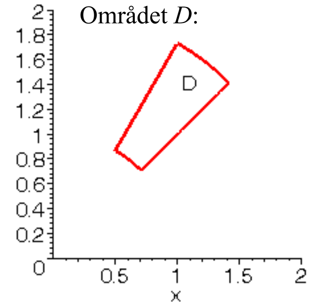
$$\int_1^{-\sqrt{e^{-3\pi}}} \tfrac{4t-1}{1+4t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}\left[\ln\left(1+4t^2\right) - \arctan(2t)\right]_1^{-e^{-\frac{3\pi}{2}}} = \underline{\tfrac{1}{2}\left(\ln\left(1+4e^{-3\pi}\right) - \ln 5 + \arctan 2 + \arctan\left(2e^{-\frac{3\pi}{2}}\right)\right)}$$ som ovan.

kurvan är en spiral:



b) Naturligtvis använder vi Greens formel ($\mathbb{F} = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\tfrac{1}{x}\arctan\tfrac{y}{x},\ -\arctan\tfrac{x}{y}\right)$ är C^1 i en öppen mängd som innehåller området D som delmängd, orienteringen (positivt = moturs) är den rätta; tyvärr är $\mathbb{F}$ ej konservativt (då vore kurvintegralen längs ∂D noll):

Området D:



$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right) dx\,dy = \iint_D \left(\tfrac{y}{x^2+y^2} - \tfrac{1}{x^2+y^2}\right) dx\,dy = [\text{pol.koord.}] =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^2 \left(\tfrac{r\sin\varphi}{r^2} - \tfrac{1}{r^2}\right) r\,dr\,d\varphi = \int_1^2 \left[-\cos\varphi - \tfrac{1}{r}\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dr =$$

$$= \int_1^2 \left(\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}\right)\tfrac{1}{r}\right) dr = \underline{\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}} - \underline{\tfrac{\pi \ln 2}{12}}.$$

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 6 A)

a) Ytan Y är den "högre hemisfären" $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x \geq 0$. Parametrisering av Y (t.ex. $(\theta,\varphi) \mapsto 2(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) skulle leda till besvärliga integraler. Men om vi lägger till ytan $D: y^2 + z^2 \leq 4$ i yz-planet, så är $Y \cup D$ begränsningsyta till kroppen K: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x \geq 0$ (normalen utåt!) och vi kan använda Gauss' sats:

$$\iint_{Y\cup D} \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\, dS = \iint_{Y} \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\, dS + \iint_{D} \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}_1\, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\, dxdydz = \iiint_K 2(1+y+4z)\, dxdydz,$$

alltså $$\iint_Y \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\, dS + \underbrace{\iint_D \underbrace{\mathbb{F} \bullet (-1,0,0)}_{=0 \text{ på } D} dS}_{=0} = 2\iint_D \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2-z^2}} (1+y+4z)\, dx \right) dydz,$$

$$\Rightarrow \iint_Y \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\, dS = 2\iint_D (1+y+4z)\sqrt{4-y^2-z^2}\, dydz = [\text{pol. koord.}] =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+r\cos\varphi+4r\sin\varphi)\sqrt{4-r^2}\, r\, drd\varphi = 2\cdot 2\pi\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\, dr = 4\pi\left[-\tfrac{1}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \underline{\tfrac{32\pi}{3}}.$$

b) Nu kan vi använda Gauss direkt: ytan $Y: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ är rand till klotet K med radien 2, alltså är $\iint_Y \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\, dS \underset{\text{Gauss}}{=} \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\, dxdydz = \iiint_K 2(1+y+4z)\, dxdydz$.

Fortsätt som ovan (då inser du direkt att du får ett dubbelt så stort flöde), eller räkna med rymdpolära koordinater:

$$\iiint_K 2(1+y+4z)\, dxdydz = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} (1+r\sin\theta\cos\varphi+4r\cos\theta) r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = = [\text{integrera först m.a.p. } \varphi]$$

$$= 4\pi\int_0^{\pi}\int_0^{2} (r^2\sin\theta + 2r^3\sin 2\theta)\, drd\theta = [\text{integrera nu m.a.p. } \theta] = 4\pi\cdot 2\int_0^2 r^2 dr = 8\pi\cdot\tfrac{8}{3} = \underline{\tfrac{64\pi}{3}}.$$

c) Räkna ut $\operatorname{rot}\mathbb{F} = (2y-2y,\, 0-0,\, 2x-2x) = \vec{0}$, det ger att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$.
En potential får vi genom att lösa differentialekvationen $\operatorname{grad}\phi = \mathbb{F}$:

$$\begin{cases} \phi'_x = 2x + 2xy \Rightarrow \underbrace{\phi(x,y,z) = x^2 + x^2y + \varphi(y,z)}_{\Downarrow} \\ \phi'_y = x^2 + 2yz \quad = \quad x^2 + \varphi'_y(y,z) \Rightarrow \underbrace{\varphi(y,z) = y^2z + g(z)}_{\Downarrow} \qquad \Rightarrow \underline{\phi(x,y,z) = x^2 + x^2y + y^2z + z^3} \\ \phi'_z = y^2 + 3z^2 \quad = \quad \varphi'_z(x,y) = y^2 + g'(z) \Rightarrow g(z) = z^3 \end{cases}$$

Därmed har vi naturligtvis än en gång visat att $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$.

d) Kurvintegralen är då enligt **c)** ("arbete = potentialskillnad"):
$\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \phi(\boldsymbol{r}(2)) - \phi(\boldsymbol{r}(1)) = \phi(5,3,3) - \phi(1,1,0) = \underline{152}$.

Lösningsförslag till instuderingsuppgift 6 B)

a) $\operatorname{div}\mathbb{F} = -2xy\sin(x^2+y^2+z^4)+2xze^{x^2+y^2+z^2}+2xy\sin(x^2+y^2+z^4)-2xze^{x^2+y^2+z^2}=0$,
alltså har $\mathbb{F}$ en vektorpotential.

b) Sök $\mathcal{A} = (0, p, q)$ så att $\operatorname{rot}\mathcal{A} = (q'_y - p'_z, -q'_x, p'_x) = \mathbb{F}$, dvs

$$\begin{cases} q'_y - p'_z = y\cos(x^2+y^2+z^4)+ze^{x^2+y^2+z^2} \\ -q'_x = -x\cos(x^2+y^2+z^4) \\ p'_x = 1-xe^{x^2+y^2+z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\sin(x^2+y^2+z^4)+u(y,z) \\ p(x,y,z) = x-\tfrac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2}+v(y,z) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q'_y - p'_z = y\cos(x^2+y^2+z^4)+u'_y+ze^{x^2+y^2+z^2}-v'_z = y\cos(x^2+y^2+z^4)+ze^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u'_y - v'_z = 0$; välj $u = v \equiv 0$. Det ger oss då $\underline{\mathcal{A} = \left(0, x-\tfrac{1}{2}e^{x^2+y^2+z^2}, \tfrac{1}{2}\sin(x^2+y^2+z^4)\right)}$.

c) Flödet är $F = \iint_S \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\,dS$ ($\boldsymbol{n}$ "uppåt" !).

Beräkning <u>med Stokes sats</u>:

$$F = \iint_S \operatorname{rot}\mathcal{A} \bullet \boldsymbol{n}\,dS = \int_{\partial S} \mathcal{A} \bullet d\boldsymbol{r} = \int_{\partial S} (0dx + pdy + qdz) =$$

$$= \left[\begin{vmatrix} z = 0 \Rightarrow dz = 0 \\ \partial S: x^2+y^2 = 1, \text{moturs} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi,\ dy = \cos\varphi\, d\varphi, \end{vmatrix}\ 0 \xrightarrow{\varphi} 2\pi \right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos\varphi - \tfrac{e}{2}\right)\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1+\cos 2\varphi}{2} - \tfrac{e}{2}\cos\varphi\right) d\varphi = \pi\ .$$

Beräkning <u>utan Stokes sats:</u>

Eftersom $\iint_{S\cup D} \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\,dS = \iint_S \mathbb{F} \bullet \boldsymbol{n}\,dS + \iint_D \mathbb{F} \bullet (0,0,-1)\,dxdy = [\text{ Gauss!}] =$

$= \iiint_K \operatorname{div}\mathbb{F}\,dxdydz = 0$ $[\partial K = S \cup D]$, så gäller $[\text{med } D: x^2+y^2 \le 1]$:

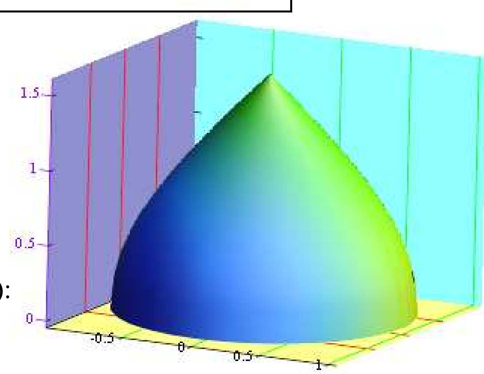
$$F = \iint_S \mathbb{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = -\iint_D \mathbb{F} \bullet (0,0,-1)\,dxdy = \iint_D \left(1-xe^{x^2+y^2}\right)dxdy = \pi - \iint_D xe^{x^2+y^2}\,dxdy = [\text{pol. koord.}]$$

$$= \pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2e^{r^2}\cos\varphi\, drd\varphi = \pi\,.$$

<u>svar:</u> $\boxed{\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}\left(0,\ 2x - e^{x^2+y^2+z^2},\ \sin(x^2+y^2+z^4)\right),\ \text{flödet är } \pi}$

Anm: Du kan beräkna F direkt:
Y är funktionsytan $z = \arccos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), (x,y) \in D$
och $F = \iint_Y \mathbb{F} \bullet (-z'_x, -z'_y, 1)\,dxdy = \ldots$ (pol. koord)!

ytan S i c):

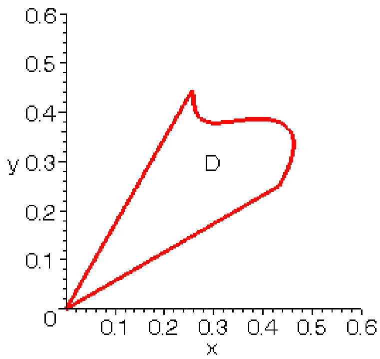


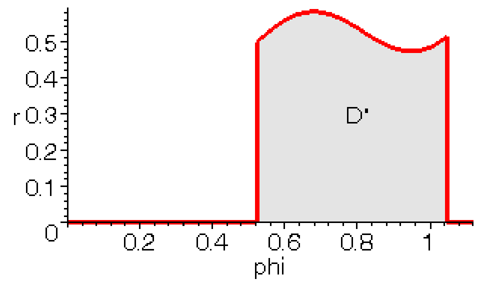
ANMÄRKNING 1: områden som ges i polära koordinater

Lösning till extrauppgift 7:

Allmänt: Ett område D i xy-planet som beskrivs med polära koordinater av

$\alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r \le f(\varphi)$ blir i φr–planet D':





För arean av D fås då formeln som vi känner redan från inledande analys (f antas vara C^0):

$$\underline{m(D)} = \iint_D dx\,dy = [\text{pol. koord.}] = \iint_{D'} r\,dr\,d\varphi = \int_\alpha^\beta \int_0^{f(\varphi)} r\,dr\,d\varphi = \underline{\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f(\varphi))^2\,d\varphi}\,.$$

Ex: Descartes ögla har den polära framställningen $r = \dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dess area är

alltså $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\varphi}{(\tan^3\varphi+1)^2\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{9}{2}\left[\frac{\frac{-1}{3}}{1+\tan^3\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\frac{3}{2}}$ (generaliserad integral!).

Men nu har du löst uppgiften med Green förstås:

$$\iint_D dx\,dy \underset{\text{Green}}{=} \int_{\partial D} (-y)\,dx = \left[\partial D: \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3},\ dt = \frac{3(1+t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases},\ 0 \xrightarrow{t} \infty\right] = -9\int_0^\infty \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3}\,dt = \begin{bmatrix} t^3 = u \\ 3t^2 dt = du \end{bmatrix} =$$

$$= 3\int_0^\infty \frac{-1+2x}{(1+x)^3}\,dx = 3\int_0^\infty \left(\frac{2}{(1+x)^2} - \frac{3}{2(1+x)^3}\right)dx = 3\left[\frac{2}{1+x} - \frac{3}{2(1+x)^2}\right]_0^\infty = \underline{\frac{3}{2}}\,.$$

Lika bra går $\iint_D dx\,dy = \int_{\partial D} x\,dy$ eller (enklast?) $\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\left(\int_{\partial D} (-y)\,dx + x\,dy\right)$. Do it!

ANMÄRKNING 2: rotationsytor

Då kurvan C: $0 \le y = f(x),\ 0 \le a \le x \le b$ roterar kring x-axeln resp. kring y-axeln alstras en rotationsyta Y som har parameterframställningen (C antas vara C^1)

Y: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,\varphi) = (x, f(x)\cos(\varphi), f(x)\sin(\varphi))$, $a \le x \le b, 0 \le \varphi \le 2\pi$ (kring x-axeln) resp.

Y: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,\varphi) = (x\cos(\varphi), f(x), x\sin(\varphi))$, $a \le x \le b, 0 \le \varphi \le 2\pi$ (kring y-axeln).

a) Motivera detta och beräkna areaelementet av Y och arean av Y i båda fall.

b) Samma uppgift då kurvan ges av $C\colon \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \xrightarrow{t} b$.

c) Beräkna arean av den rotationsyta som uppstår då kurvan $y = \arccos(x-1) + \sqrt{2x - x^2}$, $0 \le x \le 2$ roterar kring x-axeln, resp. kring y-axeln.

d) En torus bildas då cirkeln $(x-a)^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$ roterar kring y-axeln. Beräkna dess area (jmf ö 8.17).

svar:

a) $dS = f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dxd\varphi$, $m(Y) = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ (kring x-axeln),

$dS = x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dxd\varphi$, $m(Y) = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$ (kring y-axeln) [med $y = f(x)$]

b) $dS = yds$ resp. $dS = xds$, $m(Y) = 2\pi\int_c yds$ resp. $m(Y) = 2\pi\int_c xds$

[$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$; obs: kurvan skall ligga i första kvadranten; **a**) är ett specialfall av **b**)]

c) $\frac{8\pi(3\pi-4)}{3}$ resp. $\frac{32\pi}{3}$

d) $4\pi^2 ab$