Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 09-02-14

uppg. 1

Transfomationen $\underset{(x,y)\ \mapsto\ (u,v)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} \left\{ \begin{array}{l} u = x^3 + y^3 \\ v = x^3 - y^3 \end{array} \right.$ är C^1 (och bijektiv: visa det!).

Kedjeregeln ger

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 3x^2 f'_u + 3x^2 f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 3y^2 f'_u - 3y^2 f'_v \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 f'_x - x^2 f'_y = 6x^2y^2 f'_v \overset{!}{=}$$

$\overset{!}{=} x^2y^2 \cos\left(x^3 - y^3\right) \underset{\text{skall gälla för alla }(x,y)}{\Longrightarrow} f'_v = \frac{1}{6}\cos v$ med den allmänna lösningen $f(u,v) = \frac{1}{6}\sin v + g(u)$ (g en godtycklig C^1-funktion), alltså $f(x,y) = \frac{1}{6}\sin\left(x^3 - y^3\right) + g\left(x^3 + y^3\right)$.

För $y = x$ skall $f(x,x) = g\left(2x^3\right) \overset{!}{=} \cos\left(x^3\right)$, det ger $g(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$.

$\boxed{\textbf{svar}:\quad f(x,y) = \frac{1}{6}\sin\left(x^3 - y^3\right) + \cos\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)}$.

uppg. 2

Skärningspunkten mellan $x + 2y = 4$ och $x - y = 1$ är $(2,1)$ [subtraktion av de två ekvationerna ger $3y = 3$ ...], triangeln D ges då av (se figur på sidan 2)

$D : \left\{ \begin{array}{c} 4 - 2y \le x \le 1 + y \\ 1 \le y \le 2 \end{array} \right.$, volymen av kroppen

$K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 1 \le z \le \cosh(x - 2y)\}$ är alltså

$$\underline{m(K)} = \iint_D (\cosh(x-2y) - 1)\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_{4-2y}^{1+y} (\cosh(x-2y) - 1)\,dx \right) dy =$$

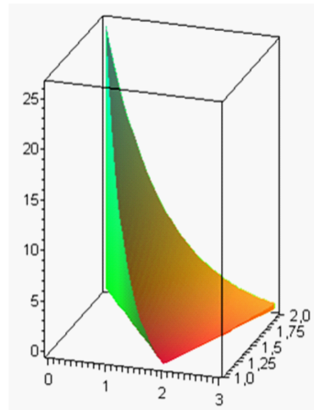
$$= \int_1^2 \left([\sinh(x-2y) - x]_{x=4-2y}^{x=1+y} \right) dy =$$

$$= \int_1^2 (4 - 2y - 1 - y + \sinh(1-y) - \sinh(4-4y))\,dy =$$

$$= \left[3\left(y - \tfrac{1}{2}y^2\right) + \tfrac{1}{4}\cosh(4-4y) - \cosh(1-y)\right]_1^2 =$$

$$= -\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{4}\cosh 4 - \tfrac{1}{4} - \cosh 1 + 1 = \underline{\tfrac{1}{4}\cosh 4 - \cosh 1 - \tfrac{3}{4}} = \textbf{svar}.$$

triangeln D



Kroppen K

uppg. 3

a) För $(x, y) \neq (0,0)$ är $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_x = y\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$ och $f'_y = x\frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$, alltså har tangentplanet i en punkt $(a, b) \neq (0,0)$ ekvationen $z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) =$
$= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^3}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}(x - a) + \frac{a^3}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}(y - b) = \frac{b^3}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}x + \frac{a^3}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}y$
eller $b^3x + a^3y - \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3 z = 0$, det är ett plan genom origo. vsv

b) Vi visar att f är partiellt deriverbar i origo: $f(0,0) = 0$ och

$$\left.\begin{array}{l} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0 \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0 \to 0 \text{ då } y \to 0 \end{array}\right\} \text{visar att } f \text{ är part. deriverbar i origo}$$

med $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ och därmed att origo är en stationär punkt till f. Origo är en sadelpunkt, ty i varje omgivning $B_\delta = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 < \delta^2\right\}$ till origo finns punkterna $\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ resp. $\left(\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}\right)$ med $f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) > 0 = f(0,0)$ resp. $f\left(\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}\right) < 0 = f(0,0)$.

ANM: För att bestämma typen av origo kan man inte använda Taylorutvecklingen (den kvadratiska formen ...) ty f är inte C^3 (inte ens C^1 som **d)** visar!

c) Vi har $f'_x = \frac{y^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$, $f'_y = \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}$ (från **a)**) och
$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ (från **b)**), alltså

$$\left.\begin{array}{l} \frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = \frac{y^3}{y\left(\sqrt{y^2}\right)^3} = \frac{1}{|y|} \to \infty \quad \text{då} \quad y \to 0 \\ \frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = \frac{x^3}{x\left(\sqrt{x^2}\right)^3} = \frac{1}{|x|} \to \infty \quad \text{då} \quad x \to 0 \end{array}\right\}, \text{ det visar att } f''_{xy} \text{ och } f''_{yx}$$

inte existerar i origo.

$$\text{men}\quad \left.\begin{array}{l} \frac{f'_x(x,0)-f'_x(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x\left(\sqrt{x^2}\right)^3} = 0 \to 0 \;\; \text{då} \;\; x \to 0 \\ \frac{f'_y(0,y)-f'_y(0,0)}{y} = \frac{0}{y\left(\sqrt{y^2}\right)^3} = 0 \to 0 \;\; \text{då} \;\; y \to 0 \end{array}\right\}, \text{ det visar att}$$

$f''_{xx}(0,0) = f''_{yy}(0,0) = 0$.

d) Låt $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$ med $v_1 v_2 \neq 0$.

$\frac{f(0+tv_1, 0+tv_2)-f(0,0)}{t} = \frac{t^2 v_1 v_2}{t\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}} = \frac{tv_1v_2}{|t|\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \begin{cases} v_1v_2 \text{ då } t>0 \\ -v_1v_2 \text{ då } t<0 \end{cases}$ saknar gränsvärde då $t \to 0$, alltså existerar inte riktningsderivatan i origo i någon annan riktning än $\pm(1,0)$ och $\pm(0,1)$ ($f'_{\pm(1,0)} = \pm f'_x$, $f'_{\pm(0,1)} = \pm f'_y$).

e) Det relativa felet $\rho(h,k) = \frac{f(0+h,0+k)-\left(f(0,0)+f'_x(0,0)h+f'_y(0,0)k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{h^2+k^2}$ går inte mot 0 då $(h,k) \to (0,0)$ ty t.ex. $\rho(h,h) = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$ då $(h,h) \to (0,0)$, alltså är f inte differentierbar i origo (och därmed inte C^1!).

Alternativt inses det med **d):** skulle f vara differentierbar i origo så skulle riktningsderivatorna existera.

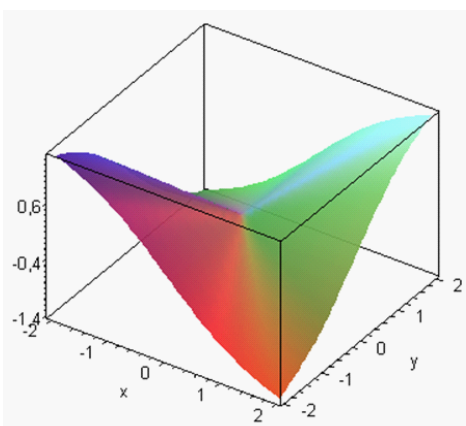
ANM: f är inte är C^1 i origo, t. ex. går $f'_x(x,y)$ inte mot $f'_x(0,0) = 0$

då $(x,y) \to (0,0)$ $\left(\text{t. ex. } f'_x(x,x) = \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+x^2}\right)^3} = \begin{cases} 1, \text{ då } x>0 \\ -1, \text{ då } x<0 \end{cases}\right)$,
men det ger INTE att f inte är differentierbar i origo!

svar:

$\boxed{\textbf{b)}\ (0,0) \text{ är en sadelpunkt} \quad \textbf{c)} \text{ bara } f''_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = 0 \text{ existerar i } (0,0)}$

$\boxed{\textbf{d)}\ f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) \text{ existerar bara för } \boldsymbol{v} = \pm(1,0) \text{ och } \boldsymbol{v} = \pm(0,1) \quad \textbf{e)} \text{ nej}}$



ytan $\boldsymbol{z = f(x,y)}$