

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-08-25, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Anna Nyström, tel. 0762 – 721861

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

1. Låt $F(x, y) = \tanh(xy) - \cos(\sinh(x - y))$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$).
 - a) Visa att nivåkurvan $F(x, y) = -\frac{2}{5}$ lokalt kring $(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$ är en funktionskurva. (2p)
 - b) Beräkna riktningsderivatan av F i punkten $(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2})$ i riktningen $(4, -3)$. (4p)

2. Visa att $v = ye^{\frac{1}{x}}$ är en karakteristisk koordinat till differentialekvationen $x^2 f'_x + y f'_y = f$, $x > 0, y > 0$ och bestäm sedan den allmänna lösningen till denna ekvation (ledning: räkna med v och $u = y$). (7p)

3. Beräkna $\iiint_{\Omega} \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{z}} dx dy dz$ där $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$. (7p)

4. Beräkna arean av området innanför kurvan $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t^2 \sin(t), t^2 \cos(t))$, $-\pi \leq t \leq \pi$. (6p)

5. Vilka värden antar $f(x, y) = 1 - x^2 y^2$ då $2x^2 + 3y^2 \leq 4$ ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$). (7p)

6. Låt $\Phi(x, y, z) = x(y + z + z^2) - yz$, $\mathbf{A} = (xy, yz, zx)$ ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) och $\mathbf{IF} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{A}$.
 - a) Beräkna \mathbf{IF} . (3p)
 - b) Beräkna flödet av \mathbf{IF} ut ur kroppen $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1 - x^2 y^2\}$. (6p)
 - c) Beräkna $\int_{\gamma} \mathbf{IF} \cdot d\mathbf{r}$ där γ är skärningskurvan mellan ytan $z = 1 - x^2 y^2$ och cylindern $2x^2 + 3y^2 = 4$ genomlöst medurs sett från origo. (6p)

7. Visa att under vissa förutsättningar (ange vilka) gäller att ett fält $\mathbf{IF} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som är konservativt i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ är virvelfritt i Ω . (4p)

8. Formulera och bevisa Stokes sats för en funktionsyta. (8p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB