Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 08-08-25

uppg. 1

$\mathbb{F}(x,y,z) = (\sinh(x+y)+z, \sinh(x+y)+y+\cosh(y-z), x-\cosh(y-z))$.

$\underline{\operatorname{div}\mathbb{F}(x,y,z)} = \frac{\partial}{\partial x}(\sinh(x+y)+z) + \frac{\partial}{\partial y}(\sinh(x+y)+y+\cosh(y-z)) +$
$+\frac{\partial}{\partial z}(x-\cosh(y-z)) = 2\underline{\cosh(x+y)+2\sinh(y-z)+1}$.

$\operatorname{div}\mathbb{F}$ växer i punkten $(1,1,1)$ snabbast i riktningen $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})(1,1,1)$,
$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})(x,y,z) = 2(\sinh(x+y), \sinh(x+y)+\cosh(y-z), -\cosh(y-z))$,
alltså $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})(1,1,1) = 2(\sinh 2, \sinh 2+1, -1)$. $\underline{\operatorname{rot}\mathbb{F}(x,y,z)} =$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sinh(x+y)+z & \sinh(x+y)+y+\cosh(y-z) & x-\cosh(y-z) \end{vmatrix} =$$

$= (0,0,0)$; eftersom $\mathbb{F}$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$ så är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$;
det kan du även visa genom att ange en potential till $\mathbb{F}$
(t.ex. $xz + \frac{1}{2}y^2 + \cosh(x+y) + \sinh(y-z)$).

svar:

$\operatorname{div}\mathbb{F} = 2(\cosh(x+y)+\sinh(y-z))+1$, ökar i $(1,1,1)$ mest i riktningen
$(\sinh 2, \sinh 2+1, -1)$; $\operatorname{rot}\mathbb{F} = (0,0,0)$, $\mathbb{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$

uppg. 2

a) $f(x,y) = 2|xy|\cos(x^2+y^2) \geq 0$ för $(x,y) \in D : x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{2}$, kroppen
$K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ har alltså volymen $V(K) =$
$= \iint_D 2|xy|\cos(x^2+y^2)\,dxdy$ = [pga symmetri] $= 4\iint_{D_+} 2xy\cos(x^2+y^2)\,dxdy$
där $D_+ = D \cap \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, alltså med pol. koord.

$\underline{V(K)} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2r^2\cos\varphi\sin\varphi\cos r^2\, r\,dr\,d\varphi =$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\varphi)\,d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} r^2 r\cos r^2\,dr =$ [part. int.] $=$

$= 4\left[-\frac{1}{2}\cos(2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2\sin r^2 + \frac{1}{2}\cos r^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) = \underline{\pi - 2}$.

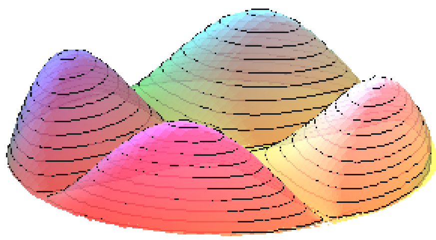
b) $\left.\begin{array}{l} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0 \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0 \to 0 \text{ då } y \to 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f$ är partiellt
deriverbar i origo med $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ och för

$$\rho(x,y) = \frac{f(x,y) - \left(f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2|xy|\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

gäller $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \rho(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \rho(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lim\limits_{r\to 0} r\,|\sin(2\varphi)|\cos r^2 = 0$
(r, φ polära koordinater). Det visar att f är differentierbar i origo.
Du kan även visa att f är C^1 i origo.

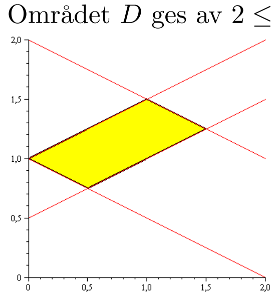
$\boxed{\textbf{svar: a) } \pi\text{-}2 \quad \textbf{b) } \text{ja}}$

kroppen K:



uppg. 3

Området D ges av $2 \le x + 2y \le 4,\ 1 \le -x + 2y \le 2$:



På D gäller $\rho(x,y,z) = ze^{x^2+4y^2} \ge 0$ ty $z \ge xe^{-2xy} \ge 0$, K:s massa är alltså

$$M(K) = \iiint\limits_K \rho(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{xe^{-2xy}}^{2ye^{-2xy}} ze^{x^2+4y^2} dz \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D e^{x^2+4y^2} \left(\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_{z=xe^{-2xy}}^{z=2ye^{-2xy}} \right) dxdy = \iint\limits_D e^{x^2+4y^2} \tfrac{1}{2}\left(4y^2 - x^2\right) e^{-4xy} dxdy =$$

$$= \tfrac{1}{2} \iint\limits_D e^{(2y-x)^2} \left(4y^2 - x^2\right) dxdy$$ (observera att $x < 2y$ på D).

Vi inför variablerna $u = x+2y,\ v = -x+2y$, området blir då $D' : \begin{cases} 2 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$

och $\underline{M(K)} = \frac{1}{2} \iint\limits_{D'} e^{v^2} vu \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| dudv = \left[\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}},\ \frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \right] =$

$$= \tfrac{1}{8} \left[\tfrac{1}{2}e^{v^2}\right]_1^2 \left[\tfrac{1}{2}u^2\right]_2^4 = \underline{\tfrac{12}{32}\left(e^4 - e\right)}.$$

$\boxed{\textbf{svar: } \dfrac{3\left(e^4 - e\right)}{8}}$

uppg. 4

En karaktäristisk koordinat till (DE) $3yf'_x + 2xf'_y = 6yf$ fås genom att lösa differentialekvationen $y' = \frac{2x}{3y}$ $(x > 0,\ y > 0)$. Den allmänna lösningen (till den separabla ekvationen $3yy' = 2x$) är $\frac{3}{2}y^2 = x^2 + c$, vi väljer alltså som nya koordinater (den karakteristiska) $u = 2x^2 - 3y^2$ och (t. ex.) $v = x$. Då blir $\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 4xf'_u + f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -6yf'_u + 0 \end{cases}$ och (DE) $3yf'_x + 2xf'_y = 3yf'_v = 6yf$, dvs. $(y \neq 0)$ $f'_v = 2f$ med lösningen $f(u,v) = g(u)\,e^{2v}$ (g en godt. deriverbar fkt.), alltså $\underline{f(x,y) = g\left(2x^2 - 3y^2\right)e^{2x}}$.

svar: $\boxed{f(x,y) = g\left(2x^2 - 3y^2\right)e^{2x}}$

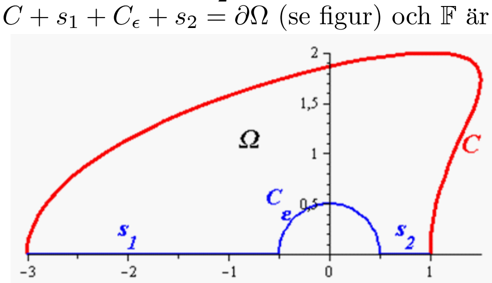
uppg. 5

$\mathbb{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{y^3 - yx^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

a) För $(x,y) \neq (0,0)$ är $P'_y = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2)^2 - (y^3 - yx^2)(x^2+y^2)4y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3}$

och $Q'_x = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2+y^2)^2 - (x^3 - xy^2)(x^2+y^2)4x}{(x^2+y^2)^4} = \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3} = P'_y$;

lägg till sträckorna s_1 resp. s_2 från $(-3,0)$ till $(-\epsilon,0)$ resp. från $(\epsilon,0)$ till $(1,0)$ med $\epsilon < 1$ (t.ex. $\epsilon = \frac{1}{2}$) längs x-axeln och $C_\varepsilon : x^2 + y^2 = \epsilon^2, y \geq 0$ (medurs), då är $C + s_1 + C_\epsilon + s_2 = \partial\Omega$ (se figur) och $\mathbb{F}$ är C^1 i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \supset \Omega$.



Green ger:

$\int\limits_{C+s_1+C_\epsilon+s_2} \mathbb{F} \bullet d\,\boldsymbol{r} = \iint\limits_{\Omega} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = 0$, det sökta arbete är alltså

$$A = \int\limits_{C} \mathbb{F} \bullet d\,\boldsymbol{r} = \int\limits_{-s_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{-C_\varepsilon} Pdx + Qdy + \int\limits_{-s_2} Pdx + Qdy =$$

$$\left[\begin{array}{l} -C_\varepsilon : \begin{cases} x = \epsilon\cos\varphi, & dx = -\epsilon\sin\varphi d\varphi \\ y = \epsilon\sin\varphi, & dy = \epsilon\cos\varphi d\varphi \end{cases}, 0 \xrightarrow{\varphi} \pi \\ \text{längs } s_1 \text{ och } s_2 \text{ är } P = 0 \text{ och } dy = 0 \end{array}\right]$$

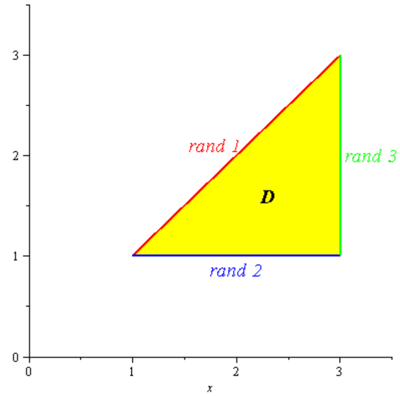
$$= 0 + \int_0^\pi \frac{\epsilon^4\left(\left(\sin^3\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi\right)(-\sin\varphi) + \left(\cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi\right)\cos\varphi\right)}{\epsilon^4} d\varphi + 0 =$$

$$= \int_0^\pi \left(-\sin^4\varphi + \cos^4\varphi\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \cos 2\varphi d\varphi = 0.$$ **Anm**: $A = \Phi(-3,0) - \Phi(1,0)$ med $\Phi(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

b) $\underline{f(x,y)} = |\mathbb{F}(x,y)| = \sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)} = \sqrt{\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^3}} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

ty $y \le x$ för $(x,y) \in D : 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le x$. f är C^1 i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \supset D$.



I. Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = \frac{2x(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2-y^2)3x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)3x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x(5y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \\ f'_y = \frac{-2y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2-y^2)3y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)3y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{y(y^2-5x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \end{cases},$$

alltså $\begin{cases} f'_x = 0 \iff -x^2+5y^2 = 0 \\ f'_y = 0 \iff 5x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$, enda lösningen är $x = y = 0$,
men $(0,0) \notin D$.

II. Randpunkter:

rand 1: $x = y$: där är $f(x,x) = 0$.
rand 2: $y = 1,\ 1 < x < 3$: $f(x,1) = g(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $g'(x) = f'_x(x,1) =$
$= \frac{x(5-x^2)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 0 \iff x = \sqrt{5}$, ger kandidaten $(\sqrt{5},1)$ $(1 < \sqrt{5} < 3)$.
rand 3: $x = 3,\ 1 < y < 3$: $f(3,y) = h(y) = \frac{9-y^2}{(9+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $h'(y) = f'_y(3,y) =$
$= \frac{y(y^2-45)}{(9+y^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \iff y = 3\sqrt{5}$ ger inget $(3\sqrt{5} > 3)$.
f är kontinuerlig på D, D är kompakt, alltså antar f ett största värde (det minsta värdet är 0), detta måsta finnas bland
$f(\sqrt{5},1) = \frac{4}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$ och (hörnpunkt!) $f(3,1) = \frac{8}{10\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{25}$;
kvadrera så ser du $\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2 = \frac{6}{81} = \frac{2}{27} = \frac{8}{108} > \left(\frac{2\sqrt{10}}{25}\right)^2 = \frac{8}{125}$,
dvs. det största värde som f antar är $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Anm: Du kunde även bestämma maximum av $|\mathbb{F}(x,y)|^2 = \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^3}$.

$\boxed{\textbf{svar: a) } 0 \quad \textbf{b) } \frac{\sqrt{6}}{9}}$