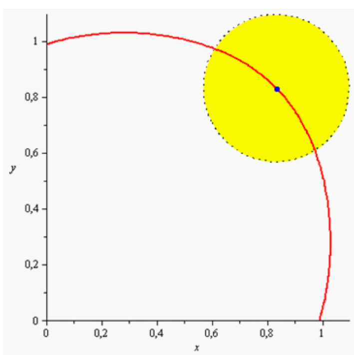
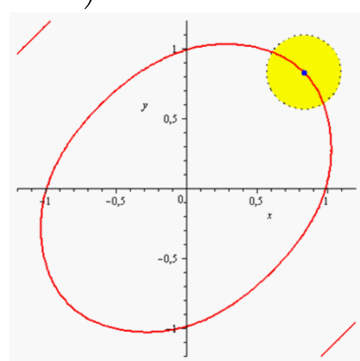
Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 09-08-25

uppg. 1

$F(x,y) = \tanh(xy) - \cos(\sinh(x-y))$ är C^1,
$F\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = \frac{\sinh(\ln 2)}{\cosh(\ln 2)} - \cos(\sinh(0)) = \frac{2-\frac{1}{2}}{2+\frac{1}{2}} - \cos(0) = \frac{3}{5} - 1 = -\frac{2}{5}$.

a) $F'_y = \frac{x}{\cosh^2(xy)} + \sin(\sinh(x-y))\cosh(x-y)(-1)$, alltså är
$F'_y\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} - 0 = \frac{16\sqrt{\ln 2}}{25} \neq 0$,
implicita funktionssatsen ger då att nivåkurvan $F(x,y) = -\frac{2}{5}$ lokalt kring $\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right)$ är en C^1–funktion $y = f(x)$.
Kurvan $F(x,y) = -\frac{2}{5}$ lokalt kring $\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right)$ och för $|x| < 1.2$, $|y| < 1.2$:





b) $F'_x = \frac{y}{\cosh^2(xy)} + \sin(\sinh(x-y))\cosh(x-y)$, alltså är
$F'_x\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + 0 = \frac{16\sqrt{\ln 2}}{25}$ och
$\text{grad}F\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = \left(\frac{16\sqrt{\ln 2}}{25}, \frac{16\sqrt{\ln 2}}{25}\right)$ och därmed
$F'_{\boldsymbol{v}}\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = \text{grad}F\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) \bullet \boldsymbol{v}$ där
$\boldsymbol{v} = \frac{1}{5}(4,-3)$ är enhetsriktningsvektor i riktningen $(4,-3)$, alltså
$F'_{\boldsymbol{v}}\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{16\sqrt{\ln 2}}{25}(1,1) \bullet (4,-3) = \frac{16\sqrt{\ln 2}}{125}$.

svar: $\boxed{\textbf{b)}\ \frac{16\sqrt{\ln 2}}{125}}$

uppg. 2

$v = ye^{\frac{1}{x}}$ är en karakteristisk koordinat till differentialekvationen
(DE) $x^2 f'_x + y f'_y = f$ ty $v(x,y) = ye^{\frac{1}{x}} = c$ är den allmänna lösningen till
$y' = \frac{y}{x^2}$: $\frac{d}{dx}\left(ye^{\frac{1}{x}}\right) = y'e^{\frac{1}{x}} - \frac{y}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = 0 \implies y' = \frac{y}{x^2}$.

Med $u = y,\ v = ye^{\frac{1}{x}}$ är $\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f_v v'_x = -\frac{y}{x^2} e^{\frac{1}{x}} f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f_v v'_y = f'_u + e^{\frac{1}{x}} f'_v \end{cases}$ och (DE) blir

$x^2 f'_x + y f'_y = y f'_u = u f'_u = f$ med allmänna lösningen $f(u,v) = ug(v)$
[separabel eller med integrerande faktor: $\left(\frac{1}{u} f\right)'_u = 0$].

svar: $\boxed{f(x,y) = yg\left(ye^{\frac{1}{x}}\right) \quad \left(g \text{ en godtycklig } C^1 - \text{funktion}\right)}$

uppg. 3

$\Omega = \{(x,y,z) : z > 0\}$, sätt $f(x,y,z) = \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{z}}$.
$f(x,y,z) > 0$; vi räknar med rymdpolära koordinater r, θ, φ; som uttömmande följd för Ω och f väljer vi $\Omega'_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \le r \le n \\ 0 \le \theta \le \alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} \quad (2 \le n \in \mathbb{N}) \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

[i x,y,z: $\Omega_n : \begin{cases} \frac{1}{n^2} \le x^2 + y^2 + z^2 \le n^2 \\ z \ge \sqrt{x^2+y^2+z^2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases}$, men det behöver vi inte]

och beräknar $I_n = \left(\iiint\limits_{\Omega_n} f(x,y,z)\, dxdydz = \right) \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\alpha_n} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{e^{-r}}{r^2 \sqrt{r\cos\theta}} r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi =$

$= 2\pi \int\limits_0^{\alpha_n} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}} d\theta \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} dr = \left[\text{substituera } \sqrt{r} = t,\ \frac{1}{\sqrt{r}} dr = 2dt\right] =$

$= 2\pi \int\limits_0^{\alpha_n} \frac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}} d\theta \int\limits_{\sqrt{\frac{1}{n}}}^{\sqrt{n}} 2e^{-t^2} dt$, alltså

$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \iiint\limits_{\Omega_n} f(x,y,z)\, dxdydz = \right)$

$= 2\pi \left[-2\sqrt{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} 2\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 8\pi \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 4\pi\sqrt{\pi}$. **svar**: $\boxed{4\pi\sqrt{\pi}}$

uppg. 4

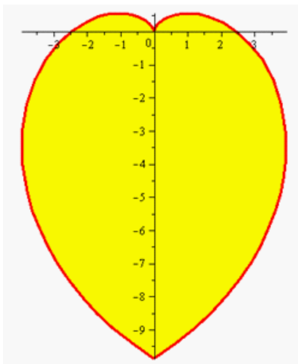
Arean av området D innanför $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$, $\pi \xrightarrow{t} -\pi$
(obs: $C = \partial D$ moturs!) är $\iint\limits_D dxdy \underset{\text{Green}}{=} \frac{1}{2} \int\limits_C -ydx + xdy =$

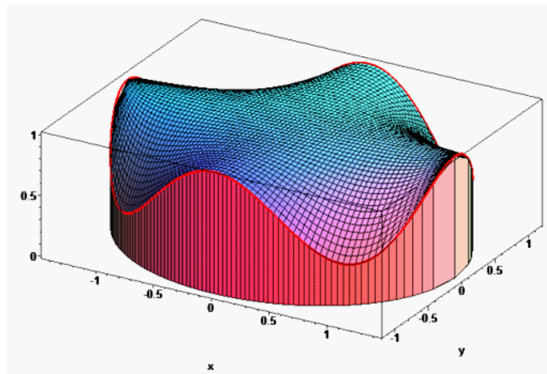
$\left[\begin{cases} x = t^2 \sin t,\ dx = \left(2t\sin t + t^2 \cos t\right) dt \\ y = t^2 \cos t,\ dy = \left(2t\cot t - t^2 \sin t\right) dt \end{cases}\right]$

$= \frac{1}{2} \int\limits_{\pi}^{-\pi} \left(-t^2 \cos t \left(2t\sin t + t^2\cos t\right) + t^2 \sin t \left(2t\cot t - t^2 \sin t\right)\right) dt =$

$= \frac{1}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{5}$. **svar**: $\boxed{\frac{\pi^5}{5}}$

området D i uppgift 4: ytan $z = 1 - (xy)^2$, $2x^2 + y^3 \leq 4$ (uppg. 5, 6):





uppg. 5

$f(x,y) = 1 - x^2y^2$ är kontinuerlig på ellipsskivan $D : 2x^2 + 3y^2 \leq 4$, D är kompakt, alltså antar f på D ett minsta värde m och ett största värde M, vidare är D bågvis sammanhängande, alltså antar f enligt satsen om mellanliggande värden även alla värden mellan m och M, svaret är därmed $[m, M]$.
Räkning: f antar m, M i en inre punkt (= stationär punkt, ty f är partiellt deriverbar i det inre av D) eller i en randpunkt:

I. Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = -2xy^2 = 0 \\ f'_y = -2x^2y = 0 \end{cases} \underset{\text{subtrahera}}{\Longrightarrow} 2xy(x - y) = 0 \implies \text{alla punkter } (0, y),\ |y| < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

och $(x, 0)$, $|x| < \sqrt{2}$ är stationära punkter med funktionsvärdet 1.

II. Randpunkter:

Sök det största/minsta värde som $f(x,y)$ antar på $\partial D : 2x^2 + 3y^2 = 4$:

lösning 1: med polära koordinater $x = \sqrt{2}\cos\varphi$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi$ är
$f(x,y) = 1 - \frac{8}{3}\cos^2\varphi\sin^2\varphi = 1 - \frac{2}{3}\sin^2(2\varphi)$, det minsta resp. största värde som f antar är alltså $\frac{1}{3}$ resp. 1.

lösning 2: med Lagrange: Sök det största/minsta värde som $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ antar under bivillkoret $g(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4 = 0$:
$\text{grad}g(x,y) = (4x, 6y) \neq (0,0)$ på ellipsen ∂D, alltså löser extrempunkter $\text{grad}f = \lambda\text{grad}g$, dvs. det finns λ_0 så att

$$\begin{cases} f'_x = \lambda_0 g'_x \\ f'_y = \lambda_0 g'_y \end{cases} : \begin{cases} (a) - 2xy^2 = \lambda_0 4x \\ (b) - 2x^2y = \lambda_0 6y \end{cases} \underset{3y(a)-2x(b)}{\Longrightarrow} 0 = 4x^3y - 6xy^3 = 2xy\left(2x^2 - 3y^2\right).$$

fall 1: $x = 0$: bivillkoret ger $y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.
fall 2: $y = 0$: bivillkoret ger $x = \pm\sqrt{2}$.
fall 3 : $xy \neq 0 \implies 2x^2 = 3y^2$: bivillkoret ger $4x^2 = 4$, alltså kandidaterna $\pm\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; m, M finns då bland $f(0,y) = f(y,0) = 1$ och
$f\left(\pm\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

lösning 3: sök max/min av $g(x) = f(x, \pm\sqrt{\frac{4-2x^2}{3}}) = 1 - \frac{x^2(4-2x^2)}{3}$,
$-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$: $g'(x) = \frac{8x}{3}\left(x^2-1\right) = 0$ ger samma kandidater som ovan.

svar: $\boxed{\left[\frac{1}{3}, 1\right]}$

uppg. 6

Låt $\Phi(x,y,z) = x\left(y+z+z^2\right) - yz$, $\mathbb{A} = (xy, yz, zx)$, $D : 2x^2 + 3y^2 \le 4$ och $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ (uppg. 5). Φ, $\mathbb{A}$ och f är C^1 i $\mathbb{R}^3$.

a) $\nabla\Phi = \left(\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z\right) = \left(y+z+z^2, x-z, x+2zx-y\right)$,

$$\nabla \times \mathbb{A} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = (-y, -z, -x),$$

alltså är $\mathbb{F} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbb{A} = \left(z+z^2, x-2z, 2zx-y\right)$ ($\mathbb{F}$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$).

b) Flödet av $\mathbb{F}$ ut ur $K = \{(x,y,z) : \ (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$ är
$\iint\limits_{\partial K} \mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS =$ [$\mathbb{N}$ utåt, Gauss] $= \iiint\limits_{K} \text{div}\mathbb{F}(x,y,z)\, dxdydz =$
$\left[\text{div}F = \nabla \bullet (\nabla\Phi) = \Phi''_{xx} + \Phi''_{yy} + \Phi''_{zz} = 2x \text{ eftersom } \nabla \bullet (\nabla \times A) = 0\ \right]$

$$= \iint\limits_D \left(\int\limits_0^{f(x,y)} 2xdz\right) dxdy = 2\iint\limits_D \left(x - x^3y^2\right) dxdy =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \left(\int\limits_{-\sqrt{\frac{4-2x^2}{3}}}^{\sqrt{\frac{4-2x^2}{3}}} \left(x - x^3y^2\right) dx\right) dy = 0 \text{ [udda integrand]}.$$

c) Skärningskurvan mellan ytan $Y : z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ och cylindern $2x^2 + 3y^2 = 4$ är kurvan $\gamma = \{(x,y,z) : (x,y) \in \partial D, z = f(x,y)\}$,
då γ genomlöpes moturs sett uppifrån genomlöpes projektionen ∂D moturs (se figur ovan) och $\int\limits_\gamma \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \iint\limits_Y \text{rot}\mathbb{F} \bullet \mathbb{N} dS =$ [$\mathbb{N}$ uppåt]

$$\left[\nabla \times \mathbb{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbb{A}) = \nabla \times (-y, -z, -x) = (1,1,1) \text{ ty } \nabla \times (\nabla\Phi) = \vec{0}\right]$$

$$= \iint\limits_D (1,1,1) \bullet \left(-f'_x, -f'_y, 1\right) dxdy = \iint\limits_D \left(2xy^2 + 2x^2y + 1\right) dxdy =$$

$$\left[\iint\limits_D 2xy^2 dxdy = \iint\limits_D 2x^2 y dxdy = 0 \text{ s.o. } \textbf{b)}\right] = \iint\limits_D dxdy = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3} \text{ (arean av } D\text{)}.$$

ANM: Integralerna i **b)** och **c)** kan naturligtvis även beräknas med polära koordinater $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi$, $0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, t. ex. är
$\iint\limits_D \left(2xy^2 + 2x^2y + 1\right) dxdy =$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \left(\frac{2}{3\sqrt{2}} r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi + \frac{2}{\sqrt{3}} r^3 \cos^2\varphi \sin\varphi + 1\right) \frac{r}{\sqrt{6}} dr d\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{6}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4\pi}{\sqrt{6}}$$

ty $\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \sin^2\varphi d\varphi = \left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi = \left[\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$.

svar: $\boxed{\textbf{a) } \mathbb{F} = \left(z+z^2, x-2z, 2xz-y\right) \qquad \textbf{b) } 0 \qquad \textbf{c) } \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}}$