Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2010-01-14, kl. 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Fredrik Lindgren, tel. 0703 –088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Kraftfältet $\mathbb{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har potentialen $\Phi(x,y,z)=\cosh(x-y)+\sinh(y-z)+x-z$.

a) Visa att ekvipotentialytan $\Phi(x,y,z)=1$ lokalt i varje punkt (a,a,a) $(a\in\mathbb{R})$ är en C^1 – funktionsyta $z=f(x,y)$ och beräkna $f_y'(a,a)$. (5p)

b) Är $\mathbb{F}$ ett rotationsfält, dvs. har $\mathbb{F}$ en vektorpotential, i $\mathbb{R}^3$? (3p)

c) Beräkna $\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}$ där C är kurvan $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=\left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right),\cos(\pi t),t\right),\, 0\xrightarrow{t}2$. (3p)

2. Låt $f(x,y)=1+\frac{y^2}{2x}$ och $D=\left\{(x,y):1\le x\le 9,\,-3\sqrt{x}\le y\le 3\sqrt{x}\right\}$.
Beräkna volymen av kroppen $K=\{(x,y,z):(x,y)\in D,\, 0\le z\le f(x,y)\}$
och arean av ytan $Y=\{(x,y,z):z=f(x,y),\,(x,y)\in D\}$. (10p)

3. Beräkna $\iiint_\Omega \frac{1}{e^{(x-y)^2}\sqrt{z+z(x+y)^2}}\,dxdydz$ där $\Omega=\left\{(x,y,z):(x,y)\in\mathbb{R}^2,\, 0\le z\le \frac{1}{1+(x+y)^2}\right\}$. (8p)

4. Fältet $\boldsymbol{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ges av $\boldsymbol{v}(x,y,z)=(-xz,yz,xy)$.

a) Är $\boldsymbol{v}$ bijektivt lokalt i $(1,1,1)$? Är $\boldsymbol{v}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$? (2p var) (4p)

b) Beräkna flödet av $\boldsymbol{v}$ genom ytan $Y=\left\{(x,y,z):x^2+y^2=1,\, 0\le z\le\sqrt{1-x^2+y^2}\right\}$ bort från origo. (7p)

5. Visa att $x+y+z\ge 3$ för alla positiva reella tal x,y,z sådana att $xyz=1$. (7p)

6. **a)** Definiera enkel kurva och sluten kurva i $\mathbb{R}^n$. (3p)

b) Vad är differentialen till ett C^1 – fält $\mathbb{F}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$? (3p)

7. Definiera riktningsderivatan $f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{a})$ och visa hur $f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten i fall f är differentierbar. Vad säger detta om gradientens fysikaliska betydelse? (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB