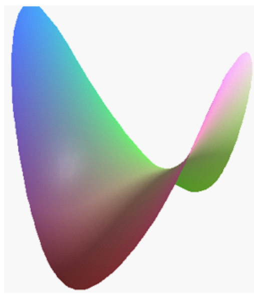
Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 09-03-12

uppg. 1

$f(x,y) = \cosh(x+y) + \sinh(x^2 - y^2)$ är C^3, $f(1,-1) = 1$.



a) $f'_x = \sinh(x+y) + 2x\cosh(x^2-y^2)$, $f'_y = \sinh(x+y) - 2y\cosh(x^2-y^2)$
tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,-1,1)$ har ekvationen
$z = f(1,-1) + f'_x(1,-1)(x-1) + f'_y(1,-1)(y+1) = 1 + 2x + 2y$.

b) $\begin{cases} f'_x = \sinh(x+y) + 2x\cosh(x^2-y^2) = 0 \\ f'_y = \sinh(x+y) - 2y\cosh(x^2-y^2) = 0 \end{cases}$, subtraktion ger
$2(x+y)\cosh(x^2-y^2) = 0$, alltså $x + y = 0$ och $f'_x(x,-x) = 2x = 0$ ger att origo är den enda stationära punkten till f.

Dess typ inses enklast via Taylorutveckling:
$e^t = 1 + t + t^2 B_1(t)$ ger $\sinh t = t + t^3 B_2(t)$, $\cosh t = 1 + \frac{1}{2}t^2 + t^3 B_3(t)$,
alltså $f(x,y) = 1 + \frac{1}{2}(x+y)^2 + (x^2-y^2) + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 B_4(x,y) =$
$= 1 + \frac{3}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 B_4(x,y)$
[B_k, $k \in \{1,2,3,4\}$, begränsade funktioner], den kvadratiska formen
$\frac{1}{2}Q(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}\left((y+x)^2 - 4x^2\right)$ är indefinit (t. ex. $Q(1,0) > 0, Q(0,1) < 0$), alltså är origo en sadelpunkt. Den kvadratiska formen fås även som $Q(x,y) = f''_{xx}(0,0)\,x^2 + 2f''_{xy}(0,0)\,xy + f''_{yy}(0,0)\,y^2$.

$\boxed{\textbf{svar: a) } 2x + 2y - z = -1 \qquad \textbf{b) } \text{origo, sadelpunkt}}$

uppg. 2

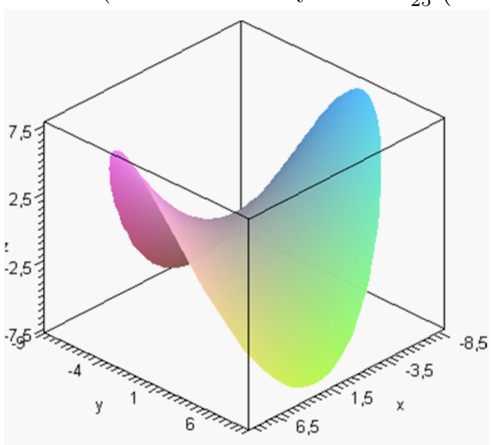
$\boldsymbol{r}(u,v) = (2u+v, u-2v, uv) \implies \boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_v(u,v) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 1 & v \\ 1 & -2 & u \end{vmatrix} =$

$= (u+2v, v-2u, -5) \implies |\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_v(u,v)| = \sqrt{u^2+4v^2+v^2+4u^2+25} =$
$= \sqrt{5}\sqrt{u^2+v^2+5}$; $\boldsymbol{r}$ är C^1, arean av ytan

$Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = (2u+v, u-2v, uv), (u,v) \in D : u^2+v^2 \leq 15$ är alltså
$m(Y) = \iint\limits_Y dS = \iint\limits_D |\boldsymbol{r}'_u(u,v) \times \boldsymbol{r}'_v(u,v)|\, dudv =$ [polära koordinater] $=$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{15}} \sqrt{5}\sqrt{r^2+5}\, r dr d\varphi = \frac{2\pi\sqrt{5}}{3}\left[\left(r^2+5\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{15}} = \frac{2\pi\sqrt{5}}{3}\left(20\sqrt{20}-5\sqrt{5}\right) =$$
$$= \frac{10\pi(40-5)}{3} = \frac{350\pi}{3}.$$

Ytan Y (det är funktionsytan $z = \frac{1}{25}\left(2x^2-3xy-2y^2\right)$, $x^2+y^2 \leq 75$):



$\boxed{\textbf{svar: } m(Y) = \frac{350\pi}{3}}$

uppg. 3

$\boldsymbol{F} = (P,Q,R) = 4(yz, xz, xy)$, $\boldsymbol{F}$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$.

a) $$\frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{x}} = \begin{vmatrix} P'_x & P'_y & P'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \\ R'_x & R'_y & R'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4z & 4y \\ 4z & 0 & 4x \\ 4y & 4x & 0 \end{vmatrix} = 4^3\left(-z\begin{vmatrix} z & x \\ y & 0 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z & 0 \\ y & x \end{vmatrix}\right) =$$
$= 2 \cdot 4^3 xyz$, alltså om $abc \neq 0$ så är $\frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{x}}(a,b,c) = 2\cdot 4^3 abc \neq 0$,
inversa funktionssatsen ger då att $\boldsymbol{F}$ är lokalt bisjektiv i (a,b,c). vsv

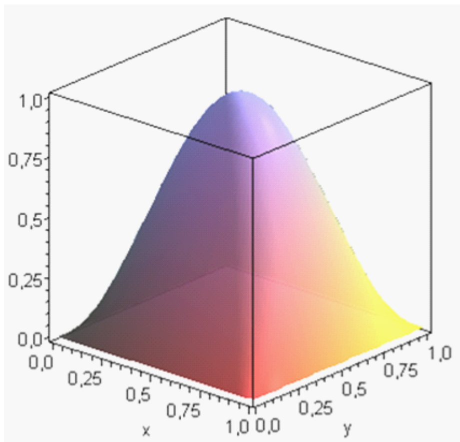
b) div$\boldsymbol{F} = P'_x + Q'_y + R'_z = 0+0+0 = 0$ (summan av diagonalelementen i $\frac{d\boldsymbol{F}}{d\boldsymbol{x}}$).

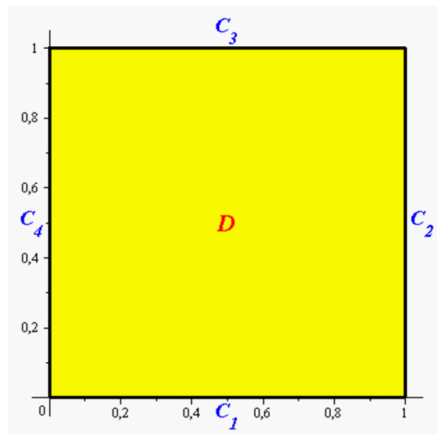
rot$\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} . & . & . \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 4xy & 4xz & 4xy \end{vmatrix} = 4(x-x, y-y, z-z) = (0,0,0)$, der ger att
$\boldsymbol{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$($\boldsymbol{F}$ är C^1 i $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ är enkelt sammanhängande). vsv

c) Vi skall bestämma $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ så att grad$\Phi = \left(\Phi'_x, \Phi'_y, \Phi'_z\right) = 4(yz, xz, xy)$:
vi ser direkt att $\Phi(x,y,z) = 4xyz$ är en potential.

d) rot$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} . & . & . \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x\left(z^2-y^2\right) & y\left(x^2-z^2\right) & z\left(y^2-x^2\right) \end{vmatrix} =$
$= (2zy+2zy, 2zx+2zx, 2xy+2xy) = 4(yz, xz, xy) = \boldsymbol{F}$. vsv

e) För $(x,y)\in D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ är $f(x,y)=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\ge 0$, $\partial D = C_1+C_2+C_3+C_4$ där C_1, C_3 resp. C_2, C_4 är sträckorna $(t,0),(t,1)$ resp. $(1,t),(0,t)$, $0\le t\le 1$ och på randen ∂D är $f(x,y)=0$.





Flödet F av $\boldsymbol{F}$ uppåt genom ytan $Y: z=f(x,y),(x,y)\in D$ kan beräknas på två sätt:

(i) med Stokes: $F=\iint\limits_Y \boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{n}dS=\iint\limits_Y \text{rot}\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{n}dS=\int\limits_{\partial Y}\boldsymbol{A}\bullet d\boldsymbol{r}$, ∂Y genomlöpt moturs ty $\boldsymbol{n}$ "uppåt" (dvs. med positiv z-koordinat) och $\partial Y=\partial D$ (moturs),

alltså $F=\int\limits_{\partial D}\boldsymbol{A}\bullet d\,\boldsymbol{r}=\int\limits_{C_1+C_2+C_3+C_4}\boldsymbol{A}\bullet d\,\boldsymbol{r}=\int\limits_{C_1+C_2+C_3+C_4}-\boldsymbol{x}y^2dx+yx^2dy=$ $[z=0;$ då $x=0$ eller $y=0$ är $\boldsymbol{A}=(0,0,0)]$

$$=\int\limits_{C_2}-\boldsymbol{x}y^2dx+yx^2dy+\int\limits_{C_3}-\boldsymbol{x}y^2dx+yx^2dy=\int_0^1 t\,dt+\int_1^0(-t)\,dt=1$$

$$\left[C_2:\begin{cases} x=1, dx=0dt \\ y=t.dy=dt\end{cases},0\xrightarrow{t}1\;,C_3:\begin{cases} x=t, dx=dt \\ y=1, dy=0dt\end{cases},1\xrightarrow{t}0\right].$$

Alternativt: $F=\int\limits_{\partial D}-\boldsymbol{x}y^2dx+yx^2dy\underset{\text{Green}}{=}\iint\limits_D(2xy+2xy)\,dxdy=$

$$=\int_0^1\int_0^1 2x2ydxdy=\left[x^2\right]_0^1\left[y^2\right]_0^1=1.$$

(ii) med Gauss: Sätt $K=\{(x,y,z):(x,y)\in D, 0\le z\le f(x,y)\}$, då är

$D\cup Y=\partial K$ och $\iint\limits_Y\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{n}dS+\iint\limits_D\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{n}dS=\iint\limits_{Y\cup D}\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{n}dS=[\boldsymbol{n}$ ut ur $K]$ $=\iint\limits_{\partial K}\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{n}dS\underset{\text{Gauss}}{=}\iiint\limits_K\text{div}\boldsymbol{F}(x,y,z)\,dxdydz=0$, alltså $F=\iint\limits_Y\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{n}dS=$ $-\iint\limits_D\boldsymbol{F}\bullet\boldsymbol{n}DS=-\iint\limits_D\boldsymbol{F}\bullet(0,0,-1)\,dS=\iint\limits_D 4xydxdy=1$ (s.o.).

svar: c) $\Phi(x,y,z)=4xyz$ **e)** 1

uppg. 4

$\boldsymbol{F} = (P, Q) = \left(3x^2 - 2xy + y^2, -x^2 + 2xy - 3y^2\right)$, $\boldsymbol{F}$ är C^1 i enkelt shgd. $\mathbb{R}^2$,
$Q'_x = -2x + 2y = P'_y$, alltså existerar Φ med grad$\Phi = \left(\Phi'_x, \Phi'_y\right) = (P, Q)$:
$\Phi'_x = 3x^2 - 2xy + y^2$ ger $\Phi(x, y) = x^3 - x^2 y + xy^2 + f(y)$ och
$\Phi'_y = -x^2 + 2xy - 3y^2 = -x^2 + 2xy + f'(y)$ ger då $f(y) = -y^3$, alltså är
$\Phi(x, y) = x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3$ ($+c$, vi väljer $c = 0$) en potential till $\boldsymbol{F}$.
Det arbete som $\boldsymbol{F}$ uträttar då en partikel förflyttas i planet från $(2, 2)$ till en punkt (x, y) är $\underline{\Phi(x, y) - \Phi(2, 2) = x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3}$ (oberoende av vägen!).

Vi skall nu bestämma det största och det minsta värde som $\Phi(x, y)$ antar då $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 2$: Φ är kontinuerlig på D och D är kompakt, alltså antar Φ ett minsta värde m och ett största värde M på D, vidare är D bågvis sammanhängande, alltså antar Φ enligt satsen om mellanliggande värden även alla värden mellan m och M, svaret är därmed $[m, M]$. Enklast fås m,M om man räknar med polära koordinater ($x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$):
$\Phi(x, y) = x^2(x - y) + y^2(x - y) = \left(x^2 + y^2\right)(x - y) = r^3(\cos\varphi - \sin\varphi) =$
$= \sqrt{2} r^3 \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ är störst/minst då $r = \sqrt{2}$ och $\cos(..) = \pm 1$, alltså
$m = -4, M = 4$.
Räkning med x, y: Φ antar m,M i en inre punkt (= stationär punkt, ty Φ är partiellt deriverbar i det inre av D) eller i en randpunkt:

I. <u>Inre punkter</u>:

$$\begin{cases} \Phi'_x = P = 3x^2 - 2xy + y^2 = 0 \\ \Phi'_y = Q = -x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \end{cases} \underset{\text{addera}}{\Longrightarrow} 2x^2 - 2y^2 = 2(x + y)(x - y) = 0,$$

$\Phi'_x(x, x) = 2x^2$, $\Phi'_x(x, -x) = 6x^2$ ger att $(0, 0)$ är den enda stationära punkten.

II. <u>Randpunkter</u>:

På randen $\partial D : x^2 + y^2 = 2$ är $\Phi(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)(x - y) = 2(x - y)$, alltså:
Sök det största/minsta värde som $f(x, y) = 2(x - y)$ antar på ∂D:

<u>lösning 1</u>: med polära koordinater $x = \sqrt{2}\cos\varphi$, $y = \sqrt{2}\sin\varphi$ är
$f(x, y) = 2\sqrt{2}(\cos\varphi - \sin\varphi) = 4\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$, det minsta resp. största värde som f antar är alltså -4 resp. 4.

<u>lösning 2</u>: med Lagrange: Sök det största/minsta värde som $f(x, y) = 2(x - y)$ antar under bivillkoret $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$:
grad$g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ på cirkeln ∂D, alltså löser extrempunkter
grad$f = \lambda$grad$g$, dvs. det finns λ_0 så att

$$\begin{cases} f'_x = \lambda_0 g'_x \\ f'_y = \lambda_0 g'_y \end{cases} : \begin{cases} 2 = \lambda_0 2x \\ -2 = \lambda_0 2y \end{cases} \Longrightarrow x = -y \underset{\text{bivillkoret}}{\Longrightarrow} 2x^2 = 2,$$

det ger två kandidater $\pm(1, -1)$; max/min finns alltså bland
$\Phi(0, 0) = 0$, $\Phi(1, -1) = f(1, -1) = 4$ och $\Phi(-1, 1) = f(-1, 1) = -4$. Det minsta resp. det största värde som Φ antar på D är alltså $m = -4$ resp. $M = 4$.

svar: $\boxed{[-4, 4]}$