Bevis av satsen

För ett fält $\mathbb{F}$ som är C^1 i en öppen, konvex mängd $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ $(\Omega \neq \emptyset)$ gäller:

$$\boxed{\mathbb{F} \text{ är källfritt i } \Omega \iff \mathbb{F} \text{ är ett rotationsfält i } \Omega.}$$

" $\Longleftarrow$ ": Om $\mathbb{F} = \text{rot}\mathbb{A}$ i Ω så är $\text{div}\mathbb{F} = \nabla \bullet \mathbb{F} = \nabla \bullet (\nabla \times \mathbb{A}) = \mathbf{0}$ i Ω (räkna ut det, här behövs inte "konvex").

" $\Longrightarrow$ ": Om $\mathbb{F} = (X, Y, Z)$ är källfritt i Ω så finns en vektorpotential $\mathbb{A}$ till $\mathbb{F}$ i Ω: vi konstruerar en vektorpotential $\mathbb{A}$ (t. ex.) så här:

Välj en godtycklig punkt $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ i Ω; eftersom Ω är konvex, så ligger för varje punkt $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \Omega$ sträckan C från $\boldsymbol{a}$ till $\boldsymbol{x}$ i Ω :
$C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (a + t(x - a), b + t(y - b), c + t(z - c)), 0 \xrightarrow{t} 1$; sätt

$P(x, y, z) = \int_0^1 (t(z - c) Y(\boldsymbol{r}(t)) - t(y - b) Z(\boldsymbol{r}(t)))\, dt,$

$Q(x, y, z) = \int_0^1 (t(x - a) Z(\boldsymbol{r}(t)) - t(z - c) X(\boldsymbol{r}(t)))\, dt$ och

$R(x, y, z) = \int_0^1 (t(y - b) X(\boldsymbol{r}(t)) - t(x - a) Y(\boldsymbol{r}(t)))\, dt$. Vi visar nu att
$\mathbb{A}(\boldsymbol{x}) = (P(\boldsymbol{x}), Q(\boldsymbol{x}), R(\boldsymbol{x}))$ är en vektorpotential till $\mathbb{F}$, dvs. att
$\text{rot}\mathbb{A} = \left(R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\right) = (X, Y, Z)$:
[derivering under integralen tillåten, se 5.1; vi skriver inte ut argumenten]

$R'_y = \int_0^1 \left(tX + t(y - b) X'_y t - t(x - a) Y'_y t\right) dt$

$Q'_z = \int_0^1 (t(x - a) Z'_z t - tX - t(z - c) X'_z t)\, dt$, alltså är

$$\underline{R'_y - Q'_z} = \int_0^1 \left(2tX - t^2(x - a)\underbrace{\left(Y'_y + Z'_z\right)}_{= -X'_x} + t^2(y - b) X'_y + t^2(z - c) X'_z\right) dt =$$

[här utnyttjar vi att $\text{div}\mathbb{F} = X'_x + Y'_y + Z'_z = 0$]

$$= \int_0^1 \left(2tX + t^2\left((x - a) X'_x + (y - b) X'_y + (z - c) X'_z\right)\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^2 X\right) dt = \left[t^2 X(\boldsymbol{r}(t))\right]_0^1 = X(\boldsymbol{r}(1)) - 0 = \underline{X(x, y, z)}$$

$[\frac{d}{dt}\left(t^2 X(\boldsymbol{r}(t))\right) = 2tX(\boldsymbol{r}(t)) + t^2 \text{grad}X(\boldsymbol{r}(t)) \bullet \boldsymbol{r}'(t) =$
$2tX(\boldsymbol{r}(t)) + t^2 \text{grad}X(\boldsymbol{r}(t)) \bullet (x - a, y - b, z - c)]$;

helt analogt visas $P'_z - R'_x = Y$ och $Q'_x - P'_y = Z$. vsv

ANM: Med $\int \mathbb{G} dt = \left(\int G_1 dt, \int G_2 dt, \int G_3 dt\right)$ för fält $\mathbb{G} = (G_1, G_2, G_3)$ är

$$\boxed{\mathbb{A}(x, y, z) = \int_0^1 t\mathbb{F}(\boldsymbol{r}(t)) \times (x - a, y - b, z - c)\, dt}.$$