Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2010-01-14, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Fredrik Lindgren, tel. 0703 – 088304
OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Kraftfältet $\mathbb{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har potentialen $\Phi(x,y,z) = \cosh(x-y) + \sinh(y-z) + x - z$.

a) Visa att ekvipotentialytan $\Phi(x,y,z) = 1$ lokalt i varje punkt (a,a,a) $(a \in \mathbb{R})$ är en C^1 − funktionsyta $z = f(x,y)$ och beräkna $f_y'(a,a)$. (5p)

b) Är $\mathbb{F}$ ett rotationsfält, dvs. har $\mathbb{F}$ en vektorpotential, i $\mathbb{R}^3$? (3p)

c) Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ där C är kurvan $C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right), \cos(\pi t), t\right), 0 \xrightarrow{t} 2$. (3p)

2. Låt $f(x,y) = 1 + \frac{y^2}{2x}$ och $D = \left\{(x,y) : 1 \le x \le 9, -3\sqrt{x} \le y \le 3\sqrt{x}\right\}$.
Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le f(x,y)\}$
och arean av ytan $Y = \{(x,y,z) : z = f(x,y), (x,y) \in D\}$. (10p)

3. Beräkna $\iiint_\Omega \frac{1}{e^{(x-y)^2}\sqrt{z + z(x+y)^2}}\,dxdydz$ där $\Omega = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le z \le \frac{1}{1+(x+y)^2}\right\}$. (8p)

4. Fältet $\boldsymbol{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (-xz, yz, xy)$.

a) Är $\boldsymbol{v}$ bijektivt lokalt i $(1,1,1)$? Är $\boldsymbol{v}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$? (2p var) (4p)

b) Beräkna flödet av $\boldsymbol{v}$ genom ytan $Y = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 + y^2}\right\}$ bort från origo. (7p)

5. Visa att $x + y + z \ge 3$ för alla positiva reella tal x, y, z sådana att $xyz = 1$. (7p)

6. **a)** Definiera enkel kurva och sluten kurva i $\mathbb{R}^n$. (3p)

b) Vad är differentialen till ett C^1 − fält $\mathbb{F}:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$? (3p)

7. Definiera riktningsderivatan $f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{a})$ och visa hur $f_{\boldsymbol{v}}'(\boldsymbol{a})$ kan uttryckas med hjälp av gradienten i fall f är differentierbar. Vad säger detta om gradientens fysikaliska betydelse? (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-08-25, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,
Telefon: Anna Nyström, tel. 0762 – 721861
OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

---

1. Låt $F(x,y) = \tanh(xy) - \cos(\sinh(x-y)) \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$.

a) Visa att nivåkurvan $F(x,y) = -\frac{2}{5}$ lokalt kring $\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right)$ är en funktionskurva. (2p)

b) Beräkna riktningsderivatan av F i punkten $\left(\sqrt{\ln 2}, \sqrt{\ln 2}\right)$ i riktningen $(4,-3)$. (4p)

2. Visa att $v = ye^{\frac{1}{x}}$ är en karakteristisk koordinat till differentialekvationen $x^2 f_x' + y f_y' = f$, $x > 0,\ y > 0$ och bestäm sedan den allmänna lösningen till denna ekvation (ledning: räkna med v och $u = y$). (7p)

3. Beräkna $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{z}}\,dxdydz$ där $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\}$. (7p)

4. Beräkna arean av området innanför kurvan $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \left(t^2 \sin(t), t^2 \cos(t)\right),\ -\pi \le t \le \pi$. (6p)

5. Vilka värden antar $f(x,y) = 1 - x^2y^2$ då $2x^2 + 3y^2 \le 4 \quad \left((x,y) \in \mathbb{R}^2\right)$. (7p)

6. Låt $\boldsymbol{\Phi}(x,y,z) = x\left(y + z + z^2\right) - yz$, $\boldsymbol{A} = (xy, yz, zx)$ $\left((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right)$ och $\mathbb{F} = \nabla\boldsymbol{\Phi} + \nabla \times \boldsymbol{A}$.

a) Beräkna $\mathbb{F}$. (3p)

b) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ ut ur kroppen $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 1 - x^2y^2\right\}$. (6p)

c) Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ där γ är skärningskurvan mellan ytan $z = 1 - x^2y^2$ och cylindern $2x^2 + 3y^2 = 4$ genomlöpt medurs sett från origo. (6p)

7. Visa att under vissa förutsättningar (ange vilka) gäller att ett fält $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som är konservativt i $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ är virvelfritt i Ω. (4p)

8. Formulera och bevisa Stokes sats för en funktionsyta. (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-03-12, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Urban Larsson, tel. 0762 – 721860

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

===

1. Låt $f(x,y) = \cosh(x+y) + \sinh(x^2 - y^2)$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,-1,1)$. (4p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (6p)

2. Beräkna arean av ytan $Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = (2u+v, u-2v, uv),\ u^2 + v^2 \leq 15$. (5p)

3. Låt $\mathbb{F}(x,y,z) = 4(yz, xz, xy)$.

a) Visa att $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är lokalt bijektiv i varje punkt (a,b,c) med $abc \neq 0$. (3p)

b) Visa, utan att beräkna (vektor)potential, att $\mathbb{F}$ är konservativt och källfritt i $\mathbb{R}^3$ (2p var). (4p)

c) Beräkna en potential till $\mathbb{F}$. (3p)

d) Visa att $\mathbb{A} = \left(x(z^2 - y^2), y(x^2 - z^2), z(y^2 - x^2)\right)$ är en vektorpotential till $\mathbb{F}$. (2p)

e) Beräkna flödet av $\mathbb{F}$ uppåt genom ytan $Y : z = \sin(\pi x)\sin(\pi y),\ (x,y) \in D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

med Stokes sats resp. med Gauss sats (5p var). (10p)

4. Låt $\mathbb{F}(x,y) = \left(3x^2 - 2xy + y^2, -x^2 + 2xy - 3y^2\right)$ och $D : x^2 + y^2 \leq 2$.

Vilka värden antar det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas i planet från punkten $(2,2)$ till punkter $(x,y) \in D$? (8p)

5. Visa att om $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ så är f kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$. (4p)

6. Visa att $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (4p)

7. Formulera och bevisa Greens sats för ett standardområde. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2009-01-14, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Martin Berglund, tel. 0762 – 721860

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $Y: x^2 + y^2 z + yz^2 = 4$ i punkten $(2,1,-1)$. (4p)

2. Beräkna arean av spiralrampen $Y: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t,\theta) = (t\cos(\theta), t\sin(\theta), \theta),\ \frac{1}{2} \le t \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi$. (7p)

3. Visa att origo är en stationär punkt och bestäm dess karaktär till

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \tan(xy)$ **b)** $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2\tan(xy)$ (4p var) (8p)

4. Låt $\mathbf{v} = \left(x^3 + xe^{xy} - z,\ xy - ye^{xy} + y^3 + z,\ -xz + y + z^3\right): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Är $\mathbf{v}$ bijektivt lokalt i origo? Är $\mathbf{v}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$? (2p var) (4p)

b) Beräkna flödet av $\mathbf{v}$ ut ur sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (7p)

5. Beräkna det arbete som fältet $\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{\sinh(x-y)-\cosh(x-y)}{\cosh(x-y)}, \frac{\cosh(x-y)-\sinh(x-y)}{\cosh(x-y)}\right)$ uträttar

då en partikel förflyttas längs spiralbågen $C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = \left(\frac{\cos(\varphi)}{\varphi}, \frac{\sin(\varphi)}{\varphi}\right),\ \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\varphi} 2\pi$. (7p)

6. Låt $Y: x^2 + y^2 z + yz^2 = 4$ (ytan i uppg. 1) och $K_r: x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$.

Bestäm den största radien R så att $Y \cap K_r = \varnothing$ för alla $r < R$. (7p)

7. a) Vad menas med att en funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är differentierbar i en punkt (a,b)? (2p)

b) Formulera och bevisa en sats om derivering av en sammansatt funktion $f(x(t), y(t))$. (7p)

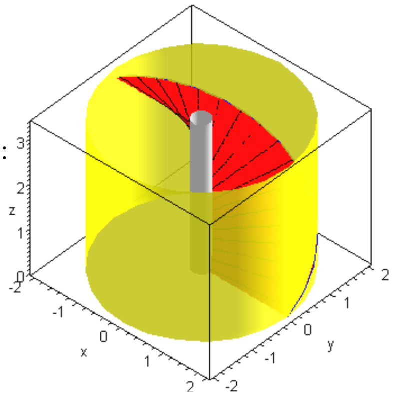
8. Visa att om $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är C^1 och virvelfritt i $\mathbb{R}^3$ så är kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$

oberoende av vägen i $\mathbb{R}^3$. (7p)

Betygsgränser:
24p – 35p ger betyget 3,
36p – 47p ger betyget 4,
48p eller mer ger betyget 5

BB

spiralrampen i uppg. 2:



Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-08-25, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Ragnar Freij, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $\mathbb{F}(x,y,z)=(\sinh(x+y)+z,\ \sinh(x+y)+y+\cosh(y-z),\ x-\cosh(y-z))$.
Beräkna divergensen och rotationen av $\mathbb{F}$. I vilken riktning ökar divergensen mest i punkten $(1,1,1)$? Är $\mathbb{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^3$. (7p)

2. Låt $f(x,y)=2|xy|\cos(x^2+y^2)$.

a) Beräkna volymen av kroppen $K=\{(x,y,z): x^2+y^2\le\frac{\pi}{2}, 0\le z\le f(x,y)\}$. (6p)

b) Är f differentierbar i origo? (4p)

3. Låt D vara den parallellogram i planet som begränsas av linjerna
$2y+x=4,\ 2y+x=2,\ 2y-x=2$ och $2y-x=1$.
Beräkna den totala massan av kroppen $K=\{(x,y,z):(x,y)\in D,\ xe^{-2xy}\le z\le 2ye^{-2xy}\}$
då dess densitet är $\rho(x,y,z)=ze^{x^2+4y^2}$. (7p)

4. Lös problemet $3yf'_x+2xf'_y=6yf,\ 0<x, 0<y$. (7p)

5. Låt $\mathbb{F}(x,y)=\left(\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)$ och $C:\begin{cases}x=2\cos t-\cos 2t\\ y=2\sin t\end{cases}$, $0\xrightarrow{t}\pi$.

a) Beräkna det arbete som $\mathbb{F}$ uträttar då en partikel förflyttas längs C. (7p)

b) Beräkna det största värde som fältstyrkan $|\mathbb{F}(x,y)|$ antar på $D: 1\le x\le 3, 1\le y\le x$. (7p)

6. a) Definiera positivt definit kvadratisk form i $\mathbb{R}^2$. (2p)

b) Visa att om $\mathbb{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ är C^1 och konservativt i $\mathbb{R}^3$ och Φ en potential till $\mathbb{F}$ i $\mathbb{R}^3$ så är $\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}=\Phi(P_1)-\Phi(P_0)$ för alla C^1-vägar C med samma startpunkt P_0 och samma ändpunkt P_1. (5p)

c) Formulera och bevisa Gauss sats. (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-03-14, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Jacob Sznajdman, tel. 0762-721860
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $F(x,y,z) = xyz - \sin(x^2 - z^2) - \cos(y^2 - z^2)$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z) = 0$ i punkten $(1,1,1)$. (4p)

b) Visa att nivåytan $F(x,y,z) = 0$ lokalt kring punkten $(1,1,1)$ är en funktionsyta $z = f(x,y)$ och bestäm $f'_x(1,1)$. (4p)

2. Beräkna arean av ytan $Y : z = \cosh\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$, $|y| \le x \le \sqrt{2}\ln 2$. (7p)

3. Bestäm de lägsta och de högsta punkterna på ytan $Y : z = x^3 + y^2$, $3x^2 + 2y^2 \le 4$ (dvs. punkterna $(x,y,z) \in Y$ med minsta resp. största z-koordinat). (7p)

4. Låt $\mathbb{F} = (yz, xy, x+y+z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Är $\mathbb{F}$ bijektivt lokalt i origo, resp. bijektiv lokalt i $(1,1,1)$? (2p +2p) (4p)

b) Har $\mathbb{F}$ en potential i $\mathbb{R}^3$? Har $\mathbb{F}$ en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$? (2p +2p) (4p)

c) Beräkna $\int_C \mathbb{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ då C är skärningskurvan mellan ytan $Y : z = x^3 + y^2$ och cylindern $3x^2 + 2y^2 = 4$ genomlöpt moturs sett uppifrån. (ledn.: använd Stokes sats) (7p)

5. Låt K vara pyramiden med hörnpunkterna $\pm(a,0,0), \pm(0,a,0)$ och $(0,0,a)$, $a > 0$ och $\boldsymbol{v} = \left(e^{x\sin z} - xye^{y\sin z}\cos z,\ 3xy^2z^2 - ye^{x\sin z}\sin z,\ (1-2xy)z^3 + e^{y\sin z}\right)$.
Beräkna flödet av strömningsfältet $\boldsymbol{v}$ uppåt genom pyramidens sneda sidor (dvs. genom ∂K utom botten, i positiva z-axelns riktning). (8p)

6. a) Definiera enkelt sammanhängande mängd i $\mathbb{R}^2$. (2p)

b) Visa att om $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ är differentierbar i $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m$ så är f kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$. (5p)

c) Formulera och bevisa Greens sats. (8p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB

SVAR

10-01-14: **1a)** ½ **b)** nej **c)** $-2-2\sinh 1$ **2)** $m(K)=260,\ m(Y)=140$ **3)** $\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\mathbb{V}$ är lokalt bijektivt i $(1,1,1)$, ej konservativt **b)** $\frac{\pi}{2}$
09-08-25: **1b)** $\frac{16\ln 2}{250}$ **2)** $yg\left(ye^{\frac{1}{x}}\right)$ **3)** $4\pi\sqrt{\pi}$ **4)** $\frac{\pi^5}{5}$ **5)** $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ **6a)** $\left(z+z^2,\ x-2z,\ 2xz-y\right)$ **b)** 0 **c)** $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$
09-03-12: **1a)** $2x+2y-z+1=0$ **b)** $(0,0)$, sadelpunkt **2)** $\frac{350\pi}{3}$ **3c)** $4xyz$ **e)** 1 **4)** $[-4, 4]$
09-01-14: **1)** $4x-y-z=8$ **2)** $\frac{\pi}{2}\left(\frac{7\sqrt{5}}{4}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ **3a)** lokal minimipunkt, **b)** sadelpunkt   **4a)** bijektivt lokalt i origo, ej konservativt **b)** $\frac{12\pi}{5}$ 4) $\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{2\pi}\right)-\frac{1}{2\pi}\right)$ **6)** $2^{\frac{5}{6}}$
08-08-25: 1) $\mathbb{F}$ är konservativt, $div\mathbb{F}=2\left(\cosh(x+y)+\sinh(y-z)\right)+1$, ökar i $(1,1,1)$ mest i riktningen $(\sinh 2, \sinh 2+1, -1)$ **2a)** $\pi-2$ **b)** ja **3)** $\frac{3\left(e^4-e\right)}{8}$ **4)** $\left(2x^2-3y^2\right)e^{2x}$ **5a)** 0 **b)** $\frac{\sqrt{6}}{9}$
08-03-14: 1a) $x-y-3z+3=0$ **b)** $\frac{1}{3}$ **2)** $\frac{9}{8}$ **3)** lägst: $-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$, högst: $\left(0, \pm\sqrt{2}, 2\right)$ **4a)** i origo: nej, i $(1,1,1)$: ja **b)** varken eller **c)** $\frac{-10\pi}{\sqrt{6}}$ **5)** $2a^2+\frac{a^5}{5}$