Övningstenta i flervariabelanalys F1 (mve035), 10-01-13

uppg. 1

Transfomationen $\mathbb{T}:\underset{(x,y)\ \mapsto\ (u,v)}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2}\left\{\begin{array}{l} u = x^2+y^2 \\ v = x^2-y^2 \end{array}\right.$ är C^∞ och i varje punkt $(x,y) \in D = \{(x,y)\,; x>0, y>0\}$ gäller

$\frac{d\mathbb{T}}{d\boldsymbol{x}}(x,y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -8xy \neq 0$, inversa funktionssatsen ger att $\mathbb{T}$ lokalt i varje punkt $(x,y) \in D$ är bijektiv. dvs. u,v dyger som nya variabler. Kedjeregeln ger

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 2xf'_u + 2xf'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = 2yf'_u - 2yf'_v \end{array}\right\} \Rightarrow yf'_x - xf'_y = 4xyf'_v \overset{!}{=} 4xy\sinh\left(x^2-y^2\right)$$

$\underset{xy\neq 0}{\Longrightarrow} f'_v = \sinh v$ med den allmänna lösningen $f(u,v) = \cosh v + g(u)$

(g en godtycklig C^1-funktion), alltså $f(x,y) = \cosh\left(x^2-y^2\right) + g\left(x^2+y^2\right)$.

För $y = x$ skall $f(x,x) = 1 + g\left(2x^2\right) \overset{!}{=} \sinh\left(2x^2\right)$, det ger $g(t) = \sinh(t) - 1$.

$\boxed{\textbf{svar}\text{: } f(x,y) = \cosh\left(x^2-y^2\right) + \sinh\left(x^2+y^2\right) - 1}$.

uppg. 2

$f(x,y) = \arctan(x+y)\arctan x - \arctan y$ är C^∞, stationära punkter:

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x = \frac{1}{1+(x+y)^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \\ f'_y = \frac{1}{1+(x+y)^2} - \frac{1}{1+y^2} = 0 \end{array}\right. \underset{\text{subtrahera}}{\Longrightarrow} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+y^2} \Longrightarrow x^2 = y^2.$$

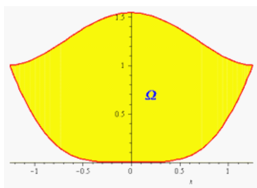
fall 1: $x = y$: $f'_x(x,x) = \frac{1}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-3x^2}{(1+4x^2)(1+x^2)} = 0 \Longrightarrow x = 0$

fall 2: $x = -y$: $f'_x(x,-x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-x^2}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$, origo är alltså den enda stationära punkten. Dess typ kan inte avgöras med vårt kriterium ty alla andragrads derivator är 0 i origo (räkna ut dem eller titta på McLaurin-utvecklingen: $\arctan t = t + t^3 B(t)$, alltså $f(x,y) = x + y - x - y + ...$(termer av ordning ≥ 3)), den kvadratiska formen är alltså bara semidefinit. Men om vi studerar f längs linjen $y = x$ så ser vi att origo är en sadelpunkt, ty $g(x) = f(x,x) = \arctan(2x) - 2\arctan(x)$ är udda och strängt avtagande ($g'(x) = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{-6x^2}{(1+4x^2)(1+x^2)} < 0$ för $x \neq 0$), alltså $f(-x,-x) > f(0,0) = 0 > f(x,x)$ för $x > 0$, det ger att det i varje omgivning $U_\delta(0,0) : x^2 + y^2 < \delta^2$ ($\delta > 0$) till origo finns punkter, t.ex. $\left(\frac{-\delta}{2}, \frac{-\delta}{2}\right)$ och $\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$ med $f\left(\frac{-\delta}{2}, \frac{-\delta}{2}\right) > f(0,0)$ och $f\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) < f(0,0)$.

svar: $\boxed{(0,0)\text{, sadelpunkt}}$

uppg. 3

Låt $D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}\right\}$ och
$K = \left\{(x,y,z) : (x,y) \in D, 1-\cos\left(x^2+y^2\right) \le z \le \cosh\left(\frac{2\left(x^2+y^2\right)-\pi}{\pi}\right)\right\}$.
ANM: K är den punktmängd i $\mathbb{R}^3$ som begränsas nedåt av $z = 1-\cos\left(x^2+y^2\right)$ och uppåt av $z = \cosh\left(\frac{2\left(x^2+y^2\right)-\pi}{\pi}\right)$; K är den rotationskropp som uppstår då området $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ mellan $y = 1-\cos\left(x^2\right)$ och $y = \cosh\left(\frac{2x^2-\pi}{\pi}\right)$, $|x| \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, roterar kring $y-$axeln ($0 \le 1-\cos\left(x^2+y^2\right) \le 1 \le \cosh\left(\frac{2\left(x^2+y^2\right)-\pi}{\pi}\right)$):



K:s volym är $\underline{m(K)} =$

$= \iint\limits_D \left(\cosh\left(\frac{2\left(x^2+y^2\right)-\pi}{\pi}\right) - \left(1-\cos\left(x^2+y^2\right)\right)\right) dxdy =$[polära koordinater]

$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\cosh\left(\frac{2r^2-\pi}{\pi}\right) - 1 + \cos\left(r^2\right)\right) r dr d\varphi =$

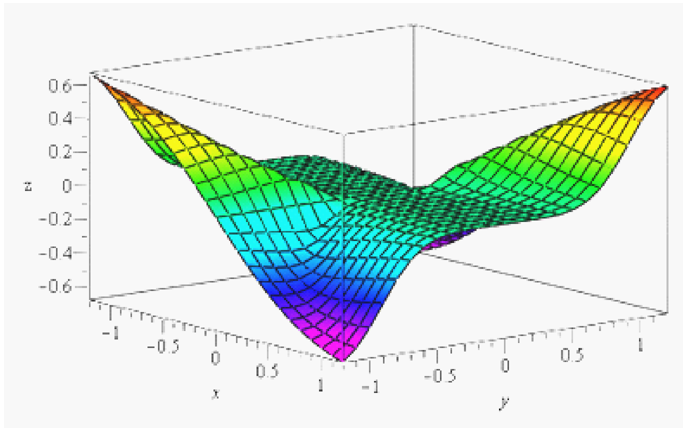
$= 2\pi \left[\frac{\pi}{4}\sinh\left(\frac{2r^2-\pi}{\pi}\right) - \frac{r^2}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(r^2\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \underline{\frac{\pi}{2}\left(\pi\sinh 1 - \pi + 2\right)}.$

svar: $\boxed{\frac{\pi}{2}\left(\pi\sinh 1 + 2 - \pi\right)}$

uppg. 4

$f(0,0) = 0$ och $f(x,y) = \frac{xy^5}{x^2+y^6}$ då $(x,y) \ne (0,0)$. Först visar vi att f är partiellt deriverbar i origo: $f(0,0) = 0$, $\left.\begin{array}{l} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0 \to 0 \text{ då } x \to 0 \\ \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0 \to 0 \text{ då } y \to 0 \end{array}\right\}$ visar att f är partiellt deriverbar i origo med $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$. För $(x,y) \ne (0,0)$ är $f'_x(x,y) = \frac{y^5\left(x^2+y^6-2x^2\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2} = \frac{y^5\left(y^6-x^2\right)}{\left(x^2+y^6\right)^2}$ och (t.ex.) $f'_x(0,y) = \frac{1}{y}$ går inte mot $f'_x(0,0) = 0$ då $(0,y) \to (0,0)$, det ger att f'_x inte är C^0, alltså att f inte är C^1, i origo. Det relativa felet $\rho(h,k) = \frac{f(0+h,0+k)-\left(f(0,0)+f'_x(0,0)h+f'_y(0,0)k\right)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
$= \frac{\frac{hk^5}{h^2+k^6}}{\sqrt{h^2+k^2}}$ går mot 0 då $(h,k) \to (0,0)$ ty $\rho(h,0) = \rho(0,k) = 0$ och för $hk \ne 0$ är $0 < |\rho(h,k)| \le \left|\frac{hk^5}{2hk^3\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{k^2}{2\sqrt{h^2+k^2}} < \frac{k^2}{2\sqrt{k^2}}$ [$h^2+k^6 \ge 2hk$ ty $\left(h-k^3\right)^2 \ge 0$], instängningslagen ger påståendet; eller $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \rho(h,k) =$[pol. koord.]$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^3\cos\varphi\sin^5\varphi}{\cos^2\varphi + r^4\sin^6\varphi} = 0$ ty $\cos^2\varphi + r^4\sin^6\varphi > 0$ för alla $\varphi, r > 0$ ($|\varphi| \ne \frac{\pi}{2}$ ty $h \ne 0$). Det visar att f är differentierbar i origo. vsv

Så ser ytan $z = f(x, y)$ ut:



ANM (teoriuppgift 5):

a) En positivt definit kvadratisk form i $\mathbb{R}^3$ är en avbildning $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$(x, y, z) \mapsto Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$ $(A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R})$
sådan att $Q(x, y, z) > 0$ för alla $(0, 0, 0) \neq (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Riktningsderivatan av $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i punkten $\boldsymbol{a}$ i riktningen $\boldsymbol{v}$ är
$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v})-f(\boldsymbol{a})}{t}$ där $\boldsymbol{a}$ är inre punkt i D_f och $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ med $|\boldsymbol{v}| = 1$
(om gränsvärdet existerar).