

Blandade andraderivator är lika när de är kontinuerliga (Clairauts sats)

Sats: Om funktionen f från \mathbb{R}^2 till \mathbb{R}^1 är C^2 i en omgivning till (a, b) , så är $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$.

Bevis: Vi betraktar f i punkterna $A = (a, b)$, $B = (a+h, b)$, $C = (a+h, b+h)$, $D = (a, b+h)$. Talet h antas ha så litet belopp att kvadraten $ABCD$ ryms inom den omgivning där f är C^2 . Sätt

$$F(x) = f(x, b+h) - f(x, b)$$

$$G(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$$

Då blir

$$F(a+h) - F(a) = G(b+h) - G(b) \tag{1}$$

$$(= f(C) - f(B) - f(D) + f(A))$$

Vi kan nu tillämpa medelvärdessatsen på F och G , varvid (1) medför

$$hF'(\xi) = hG'(\eta)$$

med $a < \xi < a+h$ och $b < \eta < b+h$. Stryk h och översätt derivatorna i termer av f :

$$f'_x(\xi, b+h) - f'_x(\xi, b) = f'_y(a+h, \eta) - f'_y(a, \eta) \tag{2}$$

Vi använder ännu en gång medelvärdessatsen, nu på funktionerna $y \mapsto f'_x(\xi, y)$ och $x \mapsto f'_y(x, \eta)$. Leden i (2) kan då skrivas:

$$hf''_{xy}(\xi, \zeta) = hf''_{yx}(\theta, \eta)$$

med $b < \zeta < b+h$ och $a < \theta < a+h$. Stryk h och låt $h \rightarrow 0$. På grund av kontinuiteten hos andraderivatorna får vi då $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$, beviset klart.

Anmärkning: av beviset framgår att det räcker att begära bara att de blandade derivatorna ska vara kontinuerliga.

Detta bevis är lite kortare och enklare än det i Persson-Böiers. Detta åstadkoms genom att välja $k = h$ och att använda lite färre funktionsnamn. Annars är det förstås samma bevis.