Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2010-08-24, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Peter Lindroth, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Låt $F(x,y,z)=x^z+yz+x\sin(\pi y)$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z)=3$ i punkten $(1,1,2)$. (4p)

b) Är nivåytan $F(x,y,z)=3$ lokalt kring $(1,1,2)$ en funktionsyta $z=f(x,y)$? (2p)

2. Lös differentialekvationen (DE) $\cosh(x)f_x'-y\sinh(x)f_y'=2y\cosh^3(x)$.

[Ledning: inför nya koordinater $u=x$ och $v=$ en karakteristisk koordinat till (DE)]. (7p)

3. Beräkna volymen av den kropp $K\subseteq\mathbb{R}^3$ som ges av olikheterna

$x^4-4\le y\le 2-x^2$, $0\le z\le 3-x^2$. (7p)

4. Finns det $\alpha\in\mathbb{R}$ så att $\mathbb{F}(x,y)=\left(\dfrac{y^2\left(x^2+y^2\right)^\alpha}{x^2},-\dfrac{y\left(x^2+y^2\right)^\alpha}{x}\right)$ är konservativt i halvplanet $x>0$? Om ja, bestäm för detta (dessa) α en potential till $\mathbb{F}$ i $x>0$. (7p)

5. Låt $\mathbb{A}(x,y,z)=\left(x^2-y^3\cos(z),\, y^2+x^3\cos(z),\, \left(x^2-y^2\right)\cos(z)\right)$

och $Y: 2x^2+2y^2+3(z-3)^2=32,\ z\ge 0$.

a) Har $\mathbb{A}$ en potential i $\mathbb{R}^3$? Har $\mathbb{A}$ en vektorpotential i $\mathbb{R}^3$? (4p)

b) Beräkna flödet av $\operatorname{rot}\mathbb{A}$ genom Y i riktning bort från origo

b1) med hjälp av Gauss sats **b2**) med hjälp av Stokes sats. (4p var) (8p)

6. Vilka värden antar $f(x,y)=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}$ på cirkeln $(x-2)^2+y^2=3$? (7p)

7. Visa att om $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är C^1 i en öppen mängd $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ så är f differentierbar i Ω. (7p)

8. Visa att om $\mathbb{F}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ är C^1 i en öppen, bågvis sammanhängande mängd $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$ och $\int_C \mathbb{F}\bullet d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen i Ω så har $\mathbb{F}$ en potential i Ω $(2\le m\in\mathbb{N})$. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB