Matematik CTH&GU

Tentamen i flervariabelanalys F1/TM1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2010-03-11, kl. 8.30-12.30 i M

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa,

Telefon: Ragnar Freij, tel. 0703 – 088304

OBS: Tentan rättas och bedöms anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

===

1. Låt $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

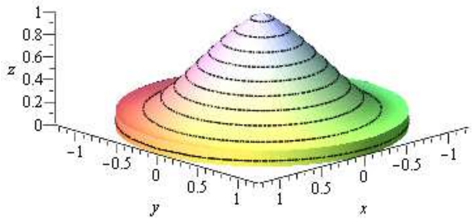
a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,2,3)$. (4p)

b) I vilken riktning växer $f(x,y)$ mest i punkten $(1,2)$? (2p)

c) Motivera varför nivåkurvan $f(x,y) = 3$ lokalt kring $(1,2)$ är en funktionskurva $y = h(x)$ och beräkna $h'(1)$. (4p)

d) Bestäm alla stationära punkter till *f* och deras karaktär. (6p)

2. Låt $f(0,0) = 0$ och $f(x,y) = \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ för $(x,y) \neq (0,0)$.



a) Visa att f är differentierbar i origo. (4p)

b) Beräkna den totala massan av kroppen
$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le z \le 1 - f(x,y)\right\}$
då dess densitet är $\rho(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$. (6p)

3. Låt $\boldsymbol{v}(x,y,z) = \left(z - y,\, \sqrt{x},\, y - \sqrt{x}\right)$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\right\}$ och
$Y : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v) = \left(u^2, u + v^2, u - v\right)$, $(u,v) \in D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2,\, -1 \le v \le 1\right\}$.

a) Beräkna areaelementet på ytan *Y* m.a.p. den givna parametriseringen och ange arean av *Y* som en dubbelintegral över *D* (du skall inte beräkna denna integral). (3p)

b) Har $\boldsymbol{v}$ en potential i Ω? (2p)

c) Har $\boldsymbol{v}$ en vektorpotential i Ω? (2p)

d) Beräkna flödet av $\boldsymbol{v}$ genom ytan Y i riktningen $\boldsymbol{r}_u' \times \boldsymbol{r}_v'$. (6p)

4. Låt $\boldsymbol{E} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ (det elektrostatiska fältet kring *z*-axeln).
Vilka värden antar fältstyrkan $|\boldsymbol{E}|$ på ellipsen $(x+y)^2 + y^2 = 10$? (7p)

5. Formulera och bevisa en sats om derivering av en sammansatt funktion $f(x(t), y(t))$. (7p)

6. Visa att om $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är C^1 och virvelfritt i en öppen, enkelt sammanhängande mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ så är $\int_C \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}$ oberoende av vägen i Ω. (7p)

Betygsgränser: 24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5 BB