MATEMATIK
Chalmers

Lösningar till övningstenta för MVE035 F/TM 2011-02-12.

1. a) Vi beräknar de partiella derivatorna:

$$f'_x(x,y) = \frac{1-xy+y(x-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1-y^2}{(1-xy)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-(1-xy)+x(x-y)}{(1-xy)^2} = \frac{x^2-1}{(1-xy)^2}$$

De stationära punkterna uppfyller alltså $x^2 = y^2 = 1$, och eftersom val av samma tecken på x och y ger $xy = 1$, så återstår punkterna $(1,-1)$ och $(-1,1)$.

b) För att avgöra punkternas karaktärer, behöver vi bestämma den kvadratiska form $Q(h,k)$ som approximerar differensen för små (h,k):

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) \approx Q(h,k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2)$$

där (a,b) är en stationär punkt. Vi deriverar vidare:

$$f''_{xx} = \frac{2y(1-y^2)}{(1-xy)^3}, \quad f''_{xy}(x,y) = \frac{2(x-y)}{(1-xy)^3}, \quad f''_{yy}(x,y) = \frac{2x(x^2-1)}{(1-xy)^3}$$

I båda de stationära punkterna är $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, medan $f''_{xy}(1,-1) = \frac{1}{2}$ och $f''_{xy}(-1,1) = -\frac{1}{2}$. Den kvadratiska formen blir därmed $Q(h,k) = hk$ respektive $Q(h,k) = -hk$. Båda dessa har olika tecken i $(h,k) = (1,1)$ och $(h,k) = (1,-1)$ och är alltså indefinita, vilket betyder att båda stationära punkterna är sadelpunkter.

c) Med enhetsvektorn $\boldsymbol{v} = \frac{1}{5}(3,4)$ är den aktuella riktningsderivatan

$$f'_{\boldsymbol{v}}(0,0) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f(0,0) = \frac{1}{5}(3,4)\cdot(1,-1) = -\frac{1}{5}.$$

2. a) Med $z(x,y) = \tilde{z}(u,v)$ och utnyttjande kedjeregeln får vi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}(-6x^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\cdot 6y$$

Högerledet i vår PDE blir

$$y\Big(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}(-6x^2)\Big) + x^2\Big(\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}\cdot 6y\Big) = y\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u}$$

och efter strykning av faktorn y har vi en ny PDE:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial u} = u^2$$

med allmänna lösningen $\tilde{z}(u,v) = \frac{u^3}{3} + g(v)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion av en variabel. I ursprungliga koordinater: $z(x,y) = \frac{x^3}{3} + g(-2x^3+3y^2)$.

b) Den lokala linjariseringen av $\boldsymbol{f}$ i $(-1,1)$ är $\boldsymbol{L}(x,y) = \boldsymbol{f'}(-1,1)\begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$, som lokalt approximerar $\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{f}(-1,1)$. Vi behöver alltså funktionalmatrisen (med u och v som i (a)):

$$\boldsymbol{f'}(x,y) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6x^2 & 6y \end{bmatrix}$$

Insättning av $(x, y) = (-1, 1)$ ger nu

$$\boldsymbol{f}(x,y) - \boldsymbol{f}(-1,1) = \begin{bmatrix} x \\ -2x^3 + 3y^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{L}(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

Anm: I många framställningar avses med linjariseringen hela uttrycket
$\boldsymbol{f}(-1,1) + \boldsymbol{f'}(-1,1) \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \end{bmatrix} \approx \boldsymbol{f}(x,y).$
Persson-Böiers (sid 131-132) avser bara den linjära formen enligt ovan. Båda varianterna godtas här.

3. Triangeln begränsas av linjerna $x + y = 1$, $x = 1$ och $y = 1$. Om vi t. ex. väljer att integrera i x-led först (andra ordningen går också bra), ser den upprepade integrationen ut så här:

$$\iint_D (x^3 + y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^1 (x^3 + y)\,dx = \int_{1-y}^1 dy \Big[\frac{x^4}{4} + xy\Big]_{x=1-y}^{x=1} =$$
$$= \int_0^1 \Big(\frac{1}{4} + y - \frac{(1-y)^4}{4} - (1-y)y\Big)dy = \int_0^1 \Big(\frac{1}{4} - \frac{(1-y)^4}{4} + y^2\Big)dy =$$
$$= \Big[\frac{y}{4} + \frac{(1-y)^5}{20} + \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{8}{15}.$$

4. a) Eftersom f är konstant noll på koordinataxlarna, så måste gälla att $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$.
Därmed är $f(0+h, 0+k) = 0 + 0 \cdot h + 0 \cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\rho(h,k)$, varmed relativa felet ges av

$$\rho(h,k) = \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^3k + 2hk^3}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Med $r = \sqrt{h^2+k^2}$ vet vi att $|h| \le r$ och $|k| \le r$, så

$$|\rho(h,k)| \le \frac{|h^3k| + 2|hk^3|}{r^3} \le \frac{3r^4}{r^3} = 3r$$

vilket visar att $\rho(h,k) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. Detta innebär att f är differentierbar i $(0,0)$.

b) För att bestämma andraderivatorna i $(0,0)$ räcker det att känna till f'_x på y-axeln och f'_y på x-axeln. De är faktiskt lättare att beräkna med definitionen än med deriveringsregler:

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2y + 2y^3}{h^2+y^2} = 2y$$

$$f'_y(x,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{x^3 + 2xk^2}{x^2+k^2} = x$$

Detta ger de blandade derivatorna på varsin koordinataxel: $f''_{xy}(0,y) = 2$, $f''_{yx}(x,0) = 1$. Då är speciellt $f''_{xy}(0,0) = 2$, $f''_{yx}(0,0) = 1$. (Funktionen kan alltså inte vara $\mathcal{C}^2$ i origo, då dessa derivator skulle varit lika!)