<u>Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2006-02-11</u>
<u>kl. 8.30-10.30 i V</u>

<u>Hjälpmedel:</u> Inga, ej heller räknedosa
<u>Telefon:</u> Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
<u>OBS:</u> Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på <u>varje</u> inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Bevisa att ekvationen $x + xy + yz = 2\sin(x) + 3\sin(y) + 2\sin(z)$ definierar lokalt i origo z som en C^1 funktion av (x, y) och ange en ekvation för tangentplanet till denna yta $z = z(x, y)$ i origo. (6p)

2. Låt $\begin{cases} u = z - x \\ v = z - y \\ w = z^4 - 2xz^3 - 2yz^3 + 6xyz^2 \end{cases}$ och $\Omega = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$.

a) Bevisa att $\mathbb{T}: \underset{(x,y,z)\,\mapsto\,(u,v,w)}{\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$ är bijektiv lokalt i varje punkt i Ω. (3p)

b) Bestäm den allmänna lösningen till problemet $f'_x + f'_y + f'_z = xyz$, $(x, y, z) \in \Omega$.
[ledning: använd u,v,w som nya variabler] (7p)

3. Låt $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{då } (x, y) = (0,0) \end{cases}$;

bevisa att f är differentierbar (4p) men inte C^1 i $(0,0)$ (3p). (7p)

4. Bevisa att om $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är C^1 i en omgivning till $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ så är f differentierbar i (a,b). (7p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng
14p – 20p: 2 bonuspoäng
21p – 27p: 3 bonuspoäng
28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2007-02-17
kl. 8.30-10.30 i V
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.
==

1. Låt $f(x,y)=x+y+\sqrt{3-x^2-y^2}$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(-1,-1,-1)$. (4p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (6p)

2. Låt $u=y+\cosh x$, $v=y-\sinh x$.

a) Visa att tillordningen $(x,y)\mapsto(u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i $\mathbb{R}^2$. (2p)

b) Lös problemet $f'_x+\cosh x\, f'_y=e^x$, $f(x, 2\sinh x)=\cosh x$. [använd u, v...] (5p)

c) Beräkna arean av det område i planet som begränsas av kurvorna
$y=6-\cosh x$, $y=3-\cosh x$, $y=\sinh x-1$ och $y=\sinh x+1$. [använd u, v...] (6p)

3. Låt $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{då } x\neq 0\\ 0 & \text{, då } x=0\end{cases}$.

Visa att riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)$ existerar för varje $\boldsymbol{v}=(\alpha,\beta)$, $\alpha^2+\beta^2=1$. (4p)
Gäller $f'_{\boldsymbol{v}}(0,0)=\operatorname{grad}f(0,0)\bullet\boldsymbol{v}$? (2p)
Är f differentierbar i $(0,0)$? (1p) (7p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng; 14p – 20p: 2 bonuspoäng; 21p – 27p: 3 bonuspoäng; 28p – 30p: 4 bonuspoäng

BB

Matematik CTH&GU

Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2008-02-16
kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

==

1. Låt $f(x,y) = 4\cos(x) - 3xy + \left(\sin\left(x+y^2\right)\right)^3 - 4\sin(y^2)$.

a) Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$. (4p)

b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess karaktär.
[ledning: Mclaurinutveckla!] (6p)

2. Låt $u = x^2 + y^2$, $v = xy$ och $\Omega = \{(x,y) : -x < y < x\}$.

a) Visa att tillordningen $(x,y) \mapsto (u,v)$ är lokalt bijektiv i varje punkt i Ω. (2p)

b) Lös problemet $xf'_x - y f'_y + \left(x^2 - y^2\right) f = 0$, $(x,y) \in \Omega$. [använd $u, v \ldots$] (4p)

3. Beräkna volymen $m(K)$ av pyramiden $K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 2 - |x+y| - |x-y|\}$
utan att använda fomeln "$m(K) = \frac{1}{3}\text{basyta} \cdot \text{höjd}$"
(du skall alltså verifiera att formeln stämmer för K). (5p)

4. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Visa att f är C^1 men inte C^2 i origo (ledning: beräkna $f''_{xy}(0,0)$ och $f''_{yx}(0,0)$). (9p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng; 14p – 20p: 2 bonuspoäng; 21p – 27p: 3 bonuspoäng; 28p – 30p: 4 bonuspoäng BB

Matematik CTH&GU

Övningsskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035), 2009-02-14
kl. 8.30-10.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa
Telefon: Bernhard Behrens, tel. 0768–681630
OBS: Tentan rättas anonymt. Skriv tentamenskoden på samtliga inlämnade papper.
Fyll i omslaget ordentligt.

==

1. Lös problemet $y^2 f_x' - x^2 f_y' = x^2 y^2 \cos\left(x^3 - y^3\right)$, $f(x,x) = \cos\left(x^3\right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
[ledning: inför de nya variablerna $u = x^3 + y^3$, $v = x^3 - y^3$]. (5p)

2. Låt D vara den triangelyta i xy-planet som begränsas av linjerna
$x + 2y = 4,\ x - y = 1$ och $y = 2$.
Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ 1 \le z \le \cosh(x - 2y)\}$. (6p)

3. Låt $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Visa att tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(a, b, f(a,b))$ går genom origo för varje $(0,0) \neq (a,b) \in \mathbb{R}^2$. (4p)

b) Visa att origo är en stationär punkt till f och bestäm dess karaktär. (4p)

c) Existerar de andragradsderivatorna $f_{xx}'', f_{yy}'', f_{xy}'', f_{yx}''$ i origo? (4p)

d) Existerar riktningsderivatan till f i origo i någon annan riktning än $(\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$? (4p)

e) Är f differentierbar i origo? (3p)

7p – 13p: 1 bonuspoäng; 14p – 20p: 2 bonuspoäng; 21p – 27p: 3 bonuspoäng; 28p – 30p: 4 bonuspoäng BB

SVAR på övningstentorna:

06-02-11: **1a)** $x + 3y + 2z = 0$	**2b)** $\frac{1}{12}\left(z^4 - 2(x+y)z^3 + 6xyz^2\right) + g(z - x, z - y)$
07-02-17: **1a)** $2x + 2y - z + 3 = 0$ **2b)** $2\sinh x + \cosh x - y$ **3)** $f_v'(0,0) = \text{grad} f(0,0) \bullet \boldsymbol{v}$ gäller inte (för godt. $\boldsymbol{v}$), f är inte C^1 i $(0,0)$	**b)** $(1,1)$ str. lokal maximipunkt **c)** $7\ln 7 - 5\ln 5 - 6\ln 2$
08-02-16: **1a)** $8x + 3\pi y + 2z = 2 + 4\pi$ **b)** origo är en lokal maximipunkt **2b)** $f(x,y) = g(xy)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ **3)** $\frac{8}{3}$	
09-02-14: 1) $f(x,y) = \frac{1}{6}\sin\left(x^3 - y^3\right) + \cos\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)$ **2)** $\frac{\cosh 4 - 4\cosh 1 - 3}{4}$ **3b)** $(0,0)$ är en sadelpunkt **c)** $f_{xx}''(0,0) = f_{yy}''(0,0) = 0$ men f_{xy}'', f_{yx}'' existerar ej i $(0,0)$ **d)** nej **e)** nej	

(ÖVNINGS-) TENTAUPPGIFTER

1. Låt $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-y)^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Visa att f är kontinuerlig i $(0,0)$ (1p), partiellt deriverbar i $(0,0)$ (3p), men inte differentierbar i $(0,0)$ (5p) (9p)

2. Låt $F(x,y,z)=x^4+y^2-z^3$.

a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan $F(x,y,z)=1$ i punkten $(1,1,1)$. (4p)

b) I vilken riktning växer funktionsvärdena snabbast i punkten $(1,1,1)$? (2p)

3. Låt $f(x,y)=\cosh(x-y^2)+\sin(x^2-y)$.

a) Bestäm en normalvektor till ytan $z=f(x,y)$ i punkten $(1,1,1)$. (4p)

b) Bestäm en ekvation för normalen till nivåkurvan $f(x,y)=1$ i punkten $(1,1)$. (3p)

4. Given är ytan $z=1+\ln(1+x^2+y^2)$.

a) Bestäm ytans nivåkurvor. (2p)

b) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan i punkten $(1,-2,1+\ln 6)$. (5p)

5. Lös för $x>0, y>0$ problemet $xf'_x-yf'_y=x+y,\ f(x,x)=\cosh x$ genom att införa nya variabler $u=xy,\ v=x-y$. Duger u,v som nya variabler? (7p)

6. Låt $f(x,y)=3\ln\sqrt{x^2+y^2+1}+xy-x^2-y^2$.

a) Taylorutveckla f kring origo med termer till och med fjärde graden och visa med hjälp härav att origo är en sadelpunkt till f. (7p)

b) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (7p)

svar: **2a)** $4x+2y-3z=3$ **b)** $(4,2,-3)$; **3a)** $(2,-1,-1)$ **b)** $x+2y=3$; **4a)** $x^2+y^2=k\ (k\geq 0)$
b) $x-2y-3z=2-3\ln 6$; **5)** $f(x,y)=x-y+\cosh(\sqrt{xy})$; **6a)** $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-\frac{3}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2y^2-\frac{3}{4}y^4$
b) $(0,0)$ sadelpunkt, $\pm(1,1)$ globala maximipunkter