Partiella differentialekvationer av första ordningen

Kjell Holmåker

23 februari 2005

En *kvasilinjär* partiell differentialekvation av första ordningen är av formen

$$P(x,y,u)u'_x + Q(x,y,u)u'_y = R(x,y,u). \tag{1}$$

Ekvationen är *linjär*, om P och Q är oberoende av u, och om $R(x,y,u)$ är av formen $R_0(x,y) + R_1(x,y)u$. Vi antar att P, Q och R är C^1-funktioner.

Om $z = u(x,y)$ är en lösningsyta till (1), så är $\mathbf{n} = (u'_x, u'_y, -1)$ en normal till ytan. Låt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vara vektorfältet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r})), \quad \text{där } \mathbf{r} = (x,y,z).$$

Då säger ekvation (1) helt enkelt att $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = 0$, dvs. $\mathbf{F}$ ligger i tangentplanet till ytan i punkten (x,y,z). Kurvor med $\mathbf{F}$ som tangentvektor spelar en viktig roll vid lösandet av (1).

Definition. En *karakteristik* är en kurva vars tangent i varje punkt $\mathbf{r}$ är parallell med $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Om karakteristikens ekvation i parameterform är $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, så är

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k(t)P(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = k(t)Q(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = k(t)R(x,y,z), \end{cases}$$

för någon kontinuerlig funktion $k(t) > 0$. Vi kan utan inskränkning anta att $k(t) \equiv 1$, ty olika funktioner $k(t)$ motsvarar bara olika, men ekvivalenta, parametriseringar av kurvan. I ett område där P, Q och R är skilda från 0 kan karakteristikens differentialekvationer skrivas parameteroberoende som

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Om t.ex. $R \equiv 0$ fås i stället $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$ och $dz = 0$, dvs. $z = C$ (en konstant).

Låt $\mathbf{a} = (a,b,c)$ vara en godtycklig punkt. Enligt teorin för ordinära differentialekvationer har systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y,z), \qquad x(0) = a, \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y,z), \qquad y(0) = b, \\ \dfrac{dz}{dt} = R(x,y,z), \qquad z(0) = c, \end{cases} \tag{2}$$

en entydig lösning i någon omgivning av $t = 0$. Det finns alltså en entydig karakteristik som går genom $\mathbf{a}$. Enligt följande sats byggs en godtycklig lösningsyta $z = u(x,y)$ till (1) upp av karakteristiker.

Sats. Antag att $u(x,y)$ är en lösning till (1) och låt $\mathbf{a} = (a,b,c)$, där $c = u(a,b)$, vara en punkt i lösningsytan. Låt $(x(t),y(t),z(t))$ vara lösningen till (2) (karakteristiken genom $\mathbf{a}$). Då gäller att hela karakteristiken ligger i lösningsytan, dvs. $z(t) = u(x(t),y(t))$.

Bevis. Låt $X = X(t)$ och $Y = Y(t)$ vara lösningen till systemet

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = P(X,Y,u(X,Y)), & X(0) = a, \\ \dfrac{dY}{dt} = Q(X,Y,u(X,Y)), & Y(0) = b. \end{cases}$$

Sätt $Z(t) = u(X(t),Y(t))$. Då är (eftersom u satisfierar (1))

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= u'_x(X,Y)X'(t) + u'_y(X,Y)Y'(t) \\ &= u'_x(X,Y)P(X,Y,u(X,Y)) + u'_y(X,Y)Q(X,Y,u(X,Y)) \\ &= R(X,Y,u(X,Y)), \end{aligned}$$

och $Z(0) = u(a,b) = c$. Alltså satisfierar (X,Y,Z)

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = P(X,Y,Z), & X(0) = a, \\ \dfrac{dY}{dt} = Q(X,Y,Z), & Y(0) = b, \\ \dfrac{dZ}{dt} = R(X,Y,Z), & Z(0) = c. \end{cases}$$

På grund av lösningens entydighet är därmed $x(t) = X(t)$, $y(t) = Y(t)$, $z(t) = Z(t)$. Det följer att $z(t) = u(x(t),y(t))$. $\blacksquare$

Ofta vill man lösa det s.k. Cauchy-problemet, dvs. man söker en lösning $z = u(x,y)$ sådan att lösningsytan innehåller en given kurva C. Låt C ha ekvationen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) = (x_0(s),y_0(s),z_0(s))$, och antag att tangentvektorn $\mathbf{r}'_0(s)$ inte är parallell med $\mathbf{F}$ (C är inte en karakteristik). Bestäm för varje s karakteristiken genom $\mathbf{r}_0(s)$. Vi får då funktioner $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$ sådana att

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = P(x,y,z), & x(s,0) = x_0(s), \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = Q(x,y,z), & y(s,0) = y_0(s), \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = R(x,y,z), & z(s,0) = z_0(s), \end{cases}$$

och $\mathbf{r} = (x(s,t),y(s,t),z(s,t))$ är en parameterframställning av lösningsytan. Vi ser att ytan genereras av en enparametrig skara av karakteristiker (s är parametern). Om s och t elimineras, kan vi skriva ytans ekvation på formen $z = u(x,y)$. Att vi verkligen har fått en lösningsyta till (1) kan inses på följande sätt. Tag en godtycklig punkt på ytan och bestäm det värde på s som hör till karakteristiken genom punkten. Om denna karakteristik har ekvationen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, så är $z(t) = u(x(t),y(t))$, och genom derivering fås

$$R = z' = u'_x x' + u'_y y' = Pu'_x + Qu'_y$$

längs karakteristiken, och speciellt i den betraktade punkten. Ekvationen (1) gäller alltså för den konstruerade funktionen.

Man kan naturligtvis också lösa Cauchy-problemet genom att först bestämma ekvationens allmänna lösning. Vi skall ange ett par metoder att göra detta.

Betrakta först fallet då P och Q är oberoende av u. Då studerar vi karakteristikens projektion på xy-planet. Lös systemet (vi antar att P och Q är skilda från 0)

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} \tag{3}$$

och skriv lösningen på formen $g(x,y) = C$, där C är en godtycklig konstant. Differentialekvationen (1) kan nu förenklas genom en variabelsubstitution; man sätter $s = g(x,y)$ och $t = h(x,y)$, där $h(x,y)$ är en C^1-funktion vilken som helst sådan att detta är ett tillåtet variabelbyte. (Valet av $h(x,y)$ visar sig vara av underordnad betydelse; ofta kan man ta x eller y.) Då övergår (1) i

$$P(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial x}) + Q(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial y}) = (P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial s} + (P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y})\frac{\partial u}{\partial t} = R.$$

Eftersom $g(x,y) = C$, är $0 = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}$, och enligt (3) har vi $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$. Alltså är $P\frac{\partial g}{\partial x} + Q\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, och ekvationen blir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{R}{P\frac{\partial h}{\partial x} + Q\frac{\partial h}{\partial y}}.$$

Här är högerledet en känd funktion av s, t och u. Vi har alltså fått en ordinär differentialekvation för u i variabeln t. Specialfallet $R = 0$ (homogen ekvation) är särskilt enkelt. Då blir $u = f(s)$, där $f(s)$ är en godtycklig funktion. Lösningen i detta fall blir alltså $u(x,y) = f(g(x,y))$.

Exempel 1. Bestäm en lösning till $-x^2u'_x + u'_y = 0$ sådan att lösningsytan innehåller halvlinjen $z = y = x > 0$.

Lösning 1. Karakteristikernas differentialekvation i xy-planet är

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{1},$$

vilket ger $\frac{1}{x} = y + C$, $g(x,y) = \frac{1}{x} - y = C$. Allmänna lösningen är enligt ovan $u(x,y) = f(\frac{1}{x} - y)$. Villkoret att $z = y = x > 0$ skall ligga i ytan ger $x = f(\frac{1}{x} - x)$. Sätt $s = \frac{1}{x} - x$. Då blir $x^2 + sx - 1 = 0$, $x = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} + 1}$. Vi måste välja plustecknet för att få $x > 0$. Alltså blir $f(s) = x = \frac{1}{2}(-s + \sqrt{s^2 + 4})$, och lösningen blir

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x} - y\right)^2 + 4}\right).$$

Lösning 2. Vi använder ”parametermetoden” som beskrevs ovan. Parametrisera den givna kurvan:

$$x = s, \quad y = s, \quad z = s, \qquad s > 0.$$

Bestäm karakteristiken:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P = -x^2, \quad x(s,0) = s, \\ \dfrac{dy}{dt} = Q = 1, \quad y(s,0) = s, \\ \dfrac{dz}{dt} = 0, \quad z(s,0) = s. \end{cases}$$

Första ekvationen ger $-\frac{dx}{x^2} = dt$, $\frac{1}{x} = t + C_1$. Villkoret för $t = 0$ ger $C_1 = \frac{1}{s}$. Lösningen blir

$$x(s,t) = \frac{1}{t + \frac{1}{s}}, \quad y(s,t) = t + s, \quad z(s,t) = s.$$

Lös ut t och s: $t = y - s$, $y - s + \frac{1}{s} = \frac{1}{x}$, $s^2 - (y - \frac{1}{x})s - 1 = 0$.

$$s = \frac{1}{2}\big(y - \frac{1}{x}\big) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\big(y - \frac{1}{x}\big)^2 + 1}.$$

Välj plustecknet för att få $s > 0$. Vi får lösningen

$$z = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{x} + \sqrt{\big(y - \frac{1}{x}\big)^2 + 4}\right) = u(x,y)$$

som förut.

Exempel 2. Lös $xyu'_x + xu'_y = y$, $x > 0$, $y > 0$.

Lösning. Karakteristikernas ekvation är

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{y}.$$

I xy-planet har vi $dx = ydy$, $x - \frac{1}{2}y^2 = C$. Sätt $s = x - \frac{1}{2}y^2$, $t = x$. Då är

$$xy\big(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 1\big) + x\big(\frac{\partial u}{\partial s} \cdot (-y) + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot 0\big) = y,$$

dvs. $xy\frac{\partial u}{\partial t} = y$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} = \frac{1}{t}$, $u = \ln t + f(s)$,

$$u(x,y) = \ln x + f(x - \tfrac{1}{2}y^2),$$

där f är en godtycklig C^1-funktion.

Återvänd till den allmänna kvasilinjära ekvationen (1). Lagrange angav följande metod för att bestämma en allmän lösning. Skriv lösningen till

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \tag{4}$$

på formen

$$g(x,y,z) = C_1, \quad h(x,y,z) = C_2. \tag{5}$$

Då ger $F(g(x,y,z), h(x,y,z)) = 0$ en lösning för varje C^1-funktion $F(s,t)$. Ekvationen (5) ger en tvåparametrig lösningsskara till (4), där varje lösningskurva framställs som skärningen mellan två ytor. Genom en relation av formen $F(C_1, C_2) = 0$ fås en enparametrig skara av karakteristiker, och enligt ovan bör detta generera en lösningsyta $z = u(x,y)$.

För en linjär, homogen ekvation (P och Q oberoende av u, $R = 0$) är ekvationen (4)

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}, \quad z = C_2.$$

Lösningen till den första ekvationen kan skrivas på formen $g(x,y) = C_1$, och enligt Lagranges metod ges den allmänna lösningen av $F(g(x,y),z) = 0$. Om z löses ut, blir lösningen av formen $z = f(g(x,y)) = u(x,y)$ som ovan.

Exempel 3. Lös $(y^2 - u^2)u'_x - xyu'_y = xu$, $x > 0$, $y > 0$. Bestäm den lösningsyta som innehåller halvlinjen $z = y = x > 0$.

Lösning. Karakteristikernas ekvation blir

$$\frac{dx}{y^2 - z^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{xz}. \tag{6}$$

Den sista likheten ger $-\ln y = \ln|z| - \ln C'_1$, $g(x,y,z) = yz = C_1$. Det kan vara litet knepigare att hitta den andra funktionen $h(x,y,z)$ i (5). Här är ett sätt: Om det gemensamma värdet av kvoterna i (6) kallas ω, så är $dx = (y^2 - z^2)\omega$, $dy = -xy\omega$, $dz = xz\omega$, varför $xdx + ydy + zdz = (xy^2 - xz^2 - xy^2 + xz^2)\omega = 0$, så att $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. En allmän lösning till ekvationen fås ur $F(yz, x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Vi kan också ansätta lösningen t.ex. på formen $yz = f(x^2 + y^2 + z^2)$, där $f(s)$ är en godtycklig C^1-funktion definierad för $s > 0$. Vi vill att ekvationen satisfieras av $z = y = x > 0$, så vi vill ha $x^2 = f(3x^2)$ för $x > 0$. Alltså är $f(s) = \frac{s}{3}$ för $s > 0$, och lösningen fås ur $yz = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$. Detta ger $z = \frac{3y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9y^2 - 4(x^2 + y^2)}$. För att $y = x > 0$ skall ge $z = x$ måste minustecknet väljas. Lösningen blir alltså

$$z = u(x,y) = \frac{1}{2}\left(3y - \sqrt{5y^2 - 4x^2}\right).$$