

Lösningar till tentan 2012 01 11

1. (a) Vi studerar första- och andraderivatorna av funktionen i punkten $(3, 3)$.

$$f'_x = 3x^2 - 9y, \quad f'_y = 3y^2 - 9x$$

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = -9, \quad f''_{yy} = 6y$$

Vi konstaterar att förstaderivatorna är noll i $(3, 3)$, som alltså mycket riktigt är en stationär punkt. Dess karaktär bestäms av den kvadratiske formen

$$Q(h) = f''_{xx}(3, 3)h^2 + 2f''_{xy}(3, 3)hk + f''_{yy}(3, 3)k^2, \quad \text{där } h = x - 3, \quad k = y - 3,$$

dvs

$$Q(h) = 18(h^2 - hk + k^2) = 18\left(\left(h - \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2\right)$$

som är *positivt definit* (dvs positiv för alla $(h, k) \neq (0, 0)$).

Detta medför att **$(3, 3)$ är ett lokalt minimum**.

- (b) Om U är en potential till F så gäller $\nabla U = F$, dvs $U'_x = (1+x)e^{x+y}$, $U'_y = xe^{x+y} + 2y$, $U'_z = -2z$. Den andra likheten ger oss $U = xe^{x+y} + y^2 + g(x, z)$, varefter vi deriverar detta med avseende på x och jämför med förstakomponenten av F : $U'_x = (1+x)e^{x+y} + g'_x(x, z) = (1+x)e^{x+y} \Rightarrow g(x, z) = h(z)$. Vi har nu $U = xe^{x+y} + y^2 + h(z)$, vilket deriveras med avseende på z och jämförs med tredjekomponenten av F : $U'_z = h'(z) = -2z$. Därmed kan vi välja $h(z) = -z^2$.

En potential för **F är $U(x, y, z) = xe^{x+y} + y^2 - z^2$** .

- (c) Vi söker en karakteristisk kurva för vårt uttryck $Pu'_x + Qu'_y$, i vilket $P = x$, $Q = 2y$. En sådan är lösning till den ordinära differentialekvationen $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \iff \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \iff 2\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, vilken är separabel och har lösningarna $2 \ln x = \ln y + \ln C \iff \frac{x^2}{y} = C$. Ett koordinatbyte som fungerar är då enligt

teorin **$s = \frac{x^2}{y}$, $t = y$** . Detta koordinatbyte ger (kedjeregeln): $u'_x = u'_s \frac{2x}{y}$, $u'_y = u'_s \frac{-x}{y^2} + u'_t$ och slutligen

$$\mathbf{xu'_x + 2yu'_y = 2tu'_t}.$$

2. Fyrhörningen är en parallelogram som begränsas av de räta linjerna $x + y = 0$, $x + y = 3$, $2y - x = 0$ och $2y - x = 3$. gör därför variabelbytet $u = x + y$, $v = 2y - x$.

Då motsvaras området D av kvadraten $D' = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 3\}$. Vi har

$$\frac{d(u, v)}{d(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

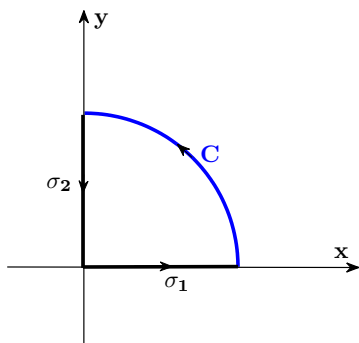
$$dxdy = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} dudv = \frac{1}{3} dudv$$

och vidare är $x = \frac{1}{3}(2u - v)$. Alltså är

$$\begin{aligned} \iint_D xe^{x+y} dxdy &= \iint_{D'} \frac{1}{3}(2u - v)e^u \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{9} \int_0^3 \left(\int_0^3 (2u - v)e^u dv \right) du = \frac{1}{9} \int_0^3 (6u - \frac{9}{2})e^u du = \\ &= \frac{1}{9} \left[(6u - \frac{9}{2})e^u \right]_0^3 - \int_0^3 6e^u du = \end{aligned}$$

$$\mathbf{\frac{1}{6}(5e^3 + 7)}$$

3. (a) Genom att komplettera kvartscirkelbågen C med bitar av koordinataxlarna σ_1 och σ_2 får vi en sluten kurva och kan använda Greens formel, eftersom fältet är C^1 överallt, bara kurvan ges rätt orientering, så som figuren visar.



Med hjälp av Greens formel kan vi nu skriva det sökta arbetet

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^{x+y}) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + e^{x+y}) \right) dx dy - \int_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \iint_D 2x dx dy - \int_0^1 (x^2 + e^y) dx - \int_1^0 e^y dy = \{ \text{polära koordinater, } |J| = r \} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2r \cos \theta) r dr d\theta - \left(e - \frac{2}{3} \right) - (1 - e) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \cdot \int_0^1 r^2 dr - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Arbetet är $\boxed{\frac{1}{3}}$.

- (b) Planet och cirkeln samt \mathbf{u} uppfyller villkoren för Stokes sats, vilken då ger

$$\int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$$

där Y är den del av planet $z = x$ som begränsas av cirkeln C och där \mathbf{N} har riktning uppåt (med avseende på z). Ur planets ekvation $1x + 0y - 1z = 0$ får vi en enhetsnormalvektor i önskad riktning $\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

Vi beräknar först $\mathbf{rot} \mathbf{F}$:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2x - z & 3x + 2y \end{vmatrix} = (2 - (-1), 0 - 3, 2 - 1) = (3, -3, 1)$$

Nu kan vi beräkna vår integral, där vi utnyttjar att integranden blir en konstant:

$$\iint_Y \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_Y (3, -3, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1) dS = \iint_Y -\sqrt{2} dS = -\sqrt{2} \text{ area}(Y) = -\pi\sqrt{2}$$

Svar: $\boxed{-\pi\sqrt{2}}$.

Uppgiften (både a och b) kan också lösas direkt via parametrisering av respektive kurva, men det är jobbigare.

4. Komplettera med "botten" $Y_1 = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ så att $Y + Y_1$ blir rand till kroppen $K = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$. Vi har normalriktning utåt från K , så med Gauss sats får vi:

$$\begin{aligned} \iint_{Y+Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_K 4z^2 dx dy dz = \iint_{Y_1} \left(\int_0^{1-x^2-y^2} 4z^2 dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{Y_1} \frac{4}{3}(1-x^2-y^2)^3 dx dy = \{ \text{polära koordinater} \} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{4}{3}(1-r^2)^3 r dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \left[-\frac{1}{6}(1-r^2)^4 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS$ med nedåtriktad normal för Y_1 och

$$\begin{aligned} \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS &= \iint_{Y_1} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0}) \cdot (0, 0, -1) dS = - \iint_{Y_1} y^2 dx dy = \{ \text{polära koordinater, } |J| = r \} = \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta = - \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Alltså är $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{7\pi}{12}}$.

Uppgiften kan lösas direkt genom parametrisering av paraboloidytan, men det blir klart jobbigare.

5. Vi vill derivera en funktion given på formen $F(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx$, en konvergent integral för varje $y > 0$. Teorin säger att funktionen är deriverbar för $y \in (0, \infty)$ med derivatan $F'(y) = \int_0^\infty f'_y(x, y) dx$ om följande förutsättningar är uppfyllda:

- $f(x, y)$ och $f'_y(x, y)$ är kontinuerliga för $(x, y) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$,
- för varje kompakt delintervall $\alpha \leq y \leq \beta$ av $(0, \infty)$ finns en funktion $g(x)$ sådan att $|f'_y(x, y)| \leq g(x)$ för $(x, y) \in [0, \infty) \times (\alpha, \beta)$ och $\int_0^\infty g(x) dx$ är konvergent.

Vår integrand är "skenbart" odefinierad då $x = 0$, men om vi sätter

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)} & \text{om } x \neq 0 \\ y & \text{om } x = 0 \end{cases}$$

så får vi $f'_y(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$ för alla $(x, y) \in [0, \infty) \times (0, \infty)$ och båda dessa funktioner blir kontinuerliga i $[0, \infty) \times (0, \infty)$ och $F(y) = \int_0^\infty f(x, y) dx$ är den givna funktionen.

Integralen $F(y)$ är konvergent för alla $y > 0$, eftersom integranden $|f(x, y)| < \frac{\pi}{2x^3}$ och $\int_0^\infty \frac{\pi}{2x^3} dx$ är konvergent (jämförelsekriteriet).

Vidare är för varje intervall $\alpha \leq y \leq \beta$ enligt ovan $f'_y(x, y) \leq g(x)$ med $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}$ och $\int_0^\infty g(x) dx$ är konvergent. Vi kan alltså derivera $F(y)$ som vi vill:

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} dx = \{ \text{partialbråksuppdelning} \} = \frac{1}{1-y^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{1-y^2} \left[\arctan x - y \arctan(xy) \right]_0^\infty = \frac{1}{1-y^2} \frac{\pi}{2} (1-y) = \frac{\pi}{2(1+y)} \end{aligned}$$

Vi får då $F(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y)$ och $F(1) = \int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \ln 2$.

$$\boxed{F'(y) = \frac{\pi}{2(1+y)}, \quad F(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y), \quad F(1) = \frac{\pi}{2} \ln 2.}$$