Blandade andraderivator är lika när de är kontinuerliga (Clairauts sats)

Sats: Om funktionen f från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^1$ är $\mathcal{C}^2$ i en omgivning till (a,b), så är $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$.

Bevis: Vi betraktar f i punkterna $A = (a,b),\ B = (a{+}h,b),\ C = (a{+}h,b{+}h),\ D = (a,b{+}h)$. Talet h antas ha så litet belopp att kvadraten $ABCD$ ryms inom den omgivning där f är $\mathcal{C}^2$. Sätt

$$F(x) = f(x,b+h) - f(x,b)$$

$$G(y) = f(a+h,y) - f(a,y)$$

Då blir

$$F(a+h) - F(a) = G(b+h) - G(b) \tag{1}$$

$$(= f(C) - f(B) - f(D) + f(A))$$

Vi kan nu tillämpa medelvärdessatsen på F och G, varvid (1) medför

$$hF'(\xi) = hG'(\eta)$$

med $a < \xi < a+h$ och $b < \eta < b+h$. Stryk h och översätt derivatorna i termer av f:

$$f'_x(\xi,b+h) - f'_x(\xi,b) = f'_y(a+h,\eta) - f'_y(a,\eta) \tag{2}$$

Vi använder ännu en gång medelvärdessatsen, nu på funktionerna $y \mapsto f'_x(\xi,y)$ och $x \mapsto f'_y(x,\eta)$. Leden i (2) kan då skrivas:

$$hf''_{xy}(\xi,\zeta) = hf''_{yx}(\theta,\eta)$$

med $b < \zeta < b+h$ och $a < \theta < a+h$. Stryk h och låt $h \to 0$. På grund av kontinuiteten hos andraderivatorna får vi då $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$, beviset klart.

Anmärkning: av beviset framgår att det räcker att begära bara att de blandade andraderivatorna ska vara kontinuerliga; f''_{xx} och f''_{yy} figurerar ju inte alls här.

Detta bevis är lite kortare och enklare än det i Persson-Böiers. Detta åstadkoms genom att välja $k = h$ och att använda lite färre funktionsnamn. Annars är det förstås samma bevis.