Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2012 03 08 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Peter Helgesson tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2012 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1112

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. (a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till grafen för funktionen $f(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{1}{y}$ i punkten $(2,1,7)$. (3p)

   (b) Funktionen i (a) har en enda stationär punkt. Bestäm den och avgör dess karaktär. (4p)

   (c) En partikel rör sig rätlinjigt från $(1,0)$ till $(2,1)$ och påverkas av kraftfältet $\boldsymbol{F} = (xy, -x^2)$. Beräkna det arbete som fältet uträttar. (3p)

   (d) Kring vilka punkter i xy-planet är avbildningen $(x,y) \mapsto (x^2 - 2y^2, x^3 + y^3)$ lokalt bijektiv? (3p)

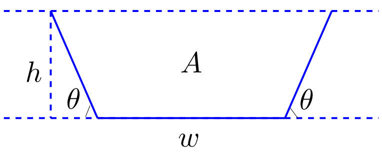
2. Beräkna arean av ytan $\{(x,y,z) : x^2 + 2y - z = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$. (7p)

3. Beräkna $\displaystyle\iiint_D xz\,dxdydz$, där $D = \{(x,y,z) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le y,\ x^2 + y^2 \le 4\}$. (7p)

4. Beräkna ytintegralen $\displaystyle\iint_Y (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N} dS$, där $\boldsymbol{F} = (y\cos(xz), -xy\sin(z^2), e^{x^2})$ och Y är ytan $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2,\ z \ge 0\}$ med normalriktning ut från z-axeln. (5p)

5. En bevattningskanal har en tvärsnittsprofil i form av ett parallelltrapets, se figuren! (7p)

   Vattnets flödeshastighet antas bli omvänt proportionell mot den "våta omkretsen" P, dvs summan av de tre heldragna längderna i figuren. Vi antar nu att tvärsnittsarean är given $= A$ och vill alltså minimera P under detta villkor. Bestäm kanalens bredd w i bottnen och dess djup h, samt lutningsvinkeln θ då P är minimal.



6. Beräkna $\displaystyle\iint_E e^{-d(x,y)^2}\,dxdy$, där $d(x,y)$ är (minsta) avståndet från punkten (x,y) till första kvadranten av enhetscirkelskivan och E är hela xy-planet utom nämnda kvartscirkelskiva. (7p)

7. Formulera och bevisa under lämpliga förutsättningar *kedjeregeln* för en funktion $f \circ g$, där g är en funktion av en variabel med värden i $\mathbb{R}^2$ och f en reellvärd funktion av två variabler. (7p)

8. Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett vektorfält definierat i en mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Antag att kurvintegralen av $\boldsymbol{F}$ är oberoende av vägen i Ω, och visa under lämpliga förutsättningar på $\boldsymbol{F}$ och Ω att fältet har en potential i Ω. (7p)

Lycka till!/LF