Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2012 08 24 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Urban Larsson, tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2012 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1112

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper. /LF

---

1. (a) Funktionen $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 8$ har stationär punkt i $(1,1)$ (bland annat). Avgör om detta är ett lokalt maximum, ett lokalt minimum eller en sadelpunkt. (3p)

   (b) En differentierbar funktion $f(x,y,z)$ växer i origo snabbast i riktningen $(1,2,2)$. I den riktningen är riktningsderivatan 6. Beräkna funktionens riktningsderivata i origo i riktning mot $(2,2,1)$. (2p)

   (c) Beräkna kurvintegralen $\int_C y^2\,dx - x^2\,dy$, där C är räta linjen från $(1,1)$ till $(3,5)$. (3p)

   (d) Låt $f(x,y)$ vara differentierbar, och $F(r,\theta) = f(x,y)$, där (r,θ) är polära koordinater i planet. Visa att $|\nabla f|^2 = (F_r')^2 + \left(\frac{F_\theta'}{r}\right)^2$. (3p)

2. (a) Skriv den upprepade integralen $\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy\right) dx$ som en upprepad integral i omvänd integrationsordning. (2p)

   (b) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2}\,dx\,dy$, där D är hela första kvadranten. (7p)

3. Hastighetsvektorn för ett vätskeflöde är $\boldsymbol{v} = (x + yz,\ xz - y,\ 2z^2)$. Beräkna den vätskevolym som per tidsenhet strömmar *ut* från området som begränsas av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ och konen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   Hastigheter och rumskoordinater är givna i SI-enheter. (7p)

4. Låt Y vara ytan $\{(x,y,z) : x^2 + y + z^2 = 10,\ y \geq 1\}$ med normalriktning i positiv y-led och beräkna ytintegralen $\iint_Y (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}\,dS$ med fältet $\boldsymbol{F} = (2xyz + 5z, e^x \cos yz, x^2 y)$. (5p)

5. Låt p, q och r vara fixa positiva tal. Bestäm största värdet av uttrycket $x^p y^q z^r$, då $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ och $x + y + z = 1$. Motivera väl! (7p)

6. Bestäm $H(x) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}\,dt$ för $x > 0$ som elementär funktion. (7p)

7. Formulera och bevisa satsen om *Taylors formel* i två variabler. (7p)

8. (a) Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett potentialfält är en potentialdifferens. (5p)

   (b) Formulera *Implicita funktionssatsen* (ej bevis). (2p)