Lösningar till tentan 2012 08 24

1. (a) Vi undersöker funktionens första- och andraderivator:

$$f'_x = 4x^3 - 4y,\ f'_y = 4y^3 - 4x,\ f''_{xx} = 12x^2, f''_{xy} = -4,\ f''_{yy} = 12y^2$$

Då ser vi att $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0$ (sant att $(1,1)$ är stationär punkt). Vi får också den kvadratiska form som utgör andra ordningens termer i Taylors formel, med $h = x-1,\ k = y-1$:

$$Q = f''_{xx}(1,1)h^2 + 2f''_{xy}(1,1)hk + f''_{yy}(1,1)k^2 = 12h^2 - 8hk + 12k^2 = 12((h - \frac{k}{3})^2 + \frac{8k^2}{9})$$

Genom kvadratkompletteringen ser vi att Q är positivt definit, vilket innebär att $(1,1)$ är ett **lokalt minimum**.

(b) Eftersom riktningsderivatan är maximal i gradientens riktning och eftersom dess värde då blir beloppet av gradienten, kan vi fastslå att gradienten är $\nabla f(0,0,0) = 2(1,2,2)$. Vi normerar riktningsvektorn: $\boldsymbol{e} = \frac{1}{3}(2,2,1)$ och beräknar den efterfrågade riktningsderivatan: $f'_{\boldsymbol{e}}(0,0,0) = \boldsymbol{e}\cdot\nabla f(0,0,0) = \frac{1}{3}(2,2,1)\cdot 2(1,2,2) = \boldsymbol{\frac{16}{3}}$

(c) Parametrisera sträckan: $\boldsymbol{r}(t) = (1,1) + t((3,5)-(1,1)) = (1+2t, 1+4t),\ 0 < t < 1$.
Integralen kan nu beräknas: $\int_C y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^1 (y(t)^2x'(t) - (x(t)^2y'(t))\,dt =$
$\int_0^1 ((1+4t)^2\cdot 2 - (1+2t)^2\cdot 4)\,dt = \int_0^1 (16t^2 - 2)\,dt = \boldsymbol{\frac{10}{3}}$.

(d) Polära koordinater: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$. Med kedjeregeln får vi:

$$F'_r = f'_x\cos\theta + f'_y\sin\theta, \quad F'_\theta = f'_x(-r\sin\theta) + f'_y(r\cos\theta)$$

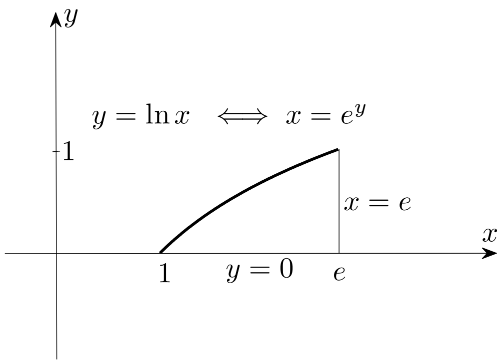
Härav följer att

$$(F'_r)^2 + \left(\frac{F'_\theta}{r}\right)^2 = (f'_x\cos\theta + f'_y\sin\theta)^2 + (f'_x(-\sin\theta) + f'_y(\cos\theta))^2 =$$

$$= (f'_x)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (f'_y)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 = |\nabla f|^2$$

så som det skulle bli.

2. (a) Vi beskriver integrationsmängden på två sätt (se nedanstående figur):
$\{(x,y) : 1 \le x \le e,\ 0 \le y \le \ln x\} = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ e^y \le x \le e\}$.
Därmed har vi $\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left(\int_{e^y}^e f(x,y)\,dx\right)dy$



(b) Vi väljer en följd av uttömmande mängder: $D_n = x^2 + 2y^2 \le n^2$.
Vi har då att beräkna $\iint_D \frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{1}{(1+x^2+2y^2)^2}\,dx\,dy$
Med elliptisk-polära koordinater $x = r\cos\theta,\ y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta,\ J = \frac{r}{\sqrt{2}}$ övergår den senare integralen i
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n \frac{r}{\sqrt{2}(1+r^2)^2}\,dr\right)d\theta = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{1+r^2}\right]_0^n = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(1 - \frac{1}{1+n^2})$
Vår generaliserade integral är gränsvärdet av detta då $n\to\infty$, dvs $\boldsymbol{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$.

3. Vi vill beräkna vätskeflödet genom randytan till det beskrivna området, här kallat K. Detta är ytintegralen $I = \iint_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS$ med N utåt från K. Gauss sats är tillämplig här; enligt denna sats är integralen lika med $I = \iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, dxdydz = \iiint_K \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz-y) + \frac{\partial}{\partial z}(2z^2) \right) dxdydz = \iiint_K 4z\, dxdydz$
Vårt område K lämpar sig för rymdpolära koordinater.
Det övergår då i $K' = \{(r,\theta,\phi) : 0 \le r \le \sqrt{8},\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le 2\pi\}$ och Jacobianen är $r^2 \sin\theta$. Nu blir
$I = \iiint_{\partial K'} 4r\ \cos\theta\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{8}} 4r^3\, dr = 2\pi \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[r^4\right]_0^{\sqrt{8}} = 32\pi$
Vätskan flödar alltså ut från K med $\mathbf{32\pi}$ **m³/s**.

4. Vår yta Y är en paraboloid med y-axeln som symmetriaxel. Dess randkurva ∂Y är $x^2+y^2=9,\ y=1$. Denna kurva är (med samma orientering) också randkurva till ytan Z som ges av $x^2+y^2 \le 9,\ y=1$ med normal i positiv y-led. Enligt Stokes sats är nu vår kurvintegral över båda dessa orienterade ytor lika med kurvintegralen $\int_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}$.
Vi skulle kunna räkna ut denna integral, men det är ännu enklare att gå på ytintegralen över den plana ytan, dvs $\iint_Z (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}\, dS$. Här är $\boldsymbol{N} = (0,1,0)$ och rotationen av $\boldsymbol{F}$ kan vi beräkna:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz+5z & e^x \cos yz & x^2 y \end{vmatrix} = (\dots, 5, \dots)$$

Här behövs ju bara y-koordinaten, eftersom vi ska multiplicera skalärt med $(0,1,0)$! Vi landar nu på en dubbelintegral:

$$\iint_Y (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_Z (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_{x^2+z^2 \le 9} (\dots, 5, \dots) \cdot (0,1,0) dxdz = 5 \iint_{x^2+z^2 \le 9} dxdz$$

Den sista integralen uttrycker arean av en cirkelskiva med radien 3. Vårt svar blir därmed $\mathbf{45\pi}$.

5. Vi ska maximera funktionen $f(x,y,z) = x^p y^q z^r$ på en triangelyta $M = \{(x,y,z) : x+y+z=1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. f är kontinuerlig, M är kompakt, så existensen av både maximum och minimum av f är garanterad på M (sats). Eftersom $f = 0$ på randen och $f > 0$ i det inre, så återstår att söka extrempunkter i triangelns inre. Detta kan formuleras som ett bivillkorsproblem: sök extrempunkter till f under bivillkoret $g = 0$, där $g(x,y,z) = x+y+z-1$. Minst en sådan extrempunkt (maximum) måste då finnas i triangelns inre. Eftersom f och g är differentierbara, ska en sådan punkt vara en där ∇f och ∇g är linjärt beroende, dvs eftersom $\nabla g \ne \mathbf{0}$ en lösning till ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla P & = & \lambda \nabla g \\ g & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} px^{p-1}y^q z^r & = & \lambda \\ qx^p y^{q-1} z^r & = & \lambda \\ rx^p y^q z^{r-1} & = & \lambda \\ x+y+z & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} py & = & qx \\ pz & = & rz \\ x+y+z & = & 1 \end{array} \right.$$

Om vi löser ut y och z i x och sätter in i sista ekvationen (bivillkoret), får vi

$$x\left(1 + \frac{q}{p} + \frac{r}{p}\right) = 1$$

vilket ger som enda lösning:

$$(x,y,z) = \left(\frac{p}{p+q+r}, \frac{q}{p+q+r}, \frac{r}{p+q+r}\right), \quad \text{med} \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{p^p q^q r^r}}{(\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r})^{\mathbf{p+q+r}}}$$

vilket därmed måste vara det sökta största värdet.

6. Vi kan försöka lösa problemet genom att derivera $H(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt$,

   där $f(x,t) = \dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ och $f'_x(x,t) = e^{-xt^2}$. Dessa funktioner uppfyller följande villkor:

   - f och f'_x är kontinuerliga för $x > 0, t \geq 0$
     Singulariteten i $t = 0$ är skenbar: sätt $f(x,0) = x$ som är gränsvärdet då $t \to 0$.
   - Integralen $H(x) = \int_0^\infty f(x,t)\,dt$ är konvergent för alla reella x,
     då $0 < f(x,t) \leq \frac{1}{t^2}$ och $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = 1$ (jämförelsesatsen för generaliserade integraler),
     intervallet $[0,1]$ är inget problem enligt ovan.
   - $|f'_x(x,y)| \leq e^{-pt^2}$ för $p \leq x \leq q$ och $\int_0^\infty e^{-pt^2}dt$ är konvergent i varje kompakt delintervall $[p,q]$ av $(0,\infty)$.

   Enligt en sats kan vi då för alla $x > 0$ derivera enligt formeln $H'(x) = \int_0^\infty f'_x(x,t)\,dt$ vilket ger

   $$H'(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt = \{\sqrt{x}t = s,\ dt = \frac{1}{\sqrt{x}}ds\ \} = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

   Eftersom $H(0) = 0$ ger detta slutligen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \sqrt{\pi\mathbf{x}}$.