

Lösningsanvisningar och svar till tentan 2013 01 19

1. (a) Ytan är en funktionsyta $f = 1$. Beräkna $\nabla f(1, -1, 1) = (5, 1, -2)$. Då är tangentplanetns ekvation: $\nabla f(1, -1, 1) \cdot (x - 1, y + 1, z - 1) = 0$, vilket ger svaret $5x + y - 2z = 2$.
- (b) Lös $\nabla f = \mathbf{0}$. Lösningarna $(0, 0)$ och $(4, 12)$ är de stationära punkterna. Undersök den kvadratiske formen $Q(h) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$ i vardera punkten. I $(0, 0)$ visar den sig vara indefinit - alltså en **sadelpunkt** i $(0, 0)$. I $(4, 12)$ är den positivt definit - därmed en **lokal minimipunkt** i $(4, 12)$.
- (c) Med $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ har vi $z'_r = z'_x x'_r + z'_y y'_r = z'_x \cos \theta + z'_y \sin \theta$, så $rz'_r = z'_x r \cos \theta + z'_y r \sin \theta = xz'_x + yz'_y$. Alltså: $xz'_x + yz'_y = rz'_r$.
- (d) Om funktionaldeterminanten $\det \mathbf{f}'(P) \neq 0$, så är enligt inversa funktionssatsen \mathbf{f} lokalt inverterbar kring P . Inversen är inversa matrisen till $\mathbf{f}'(P)$.

$$\mathbf{f}'(P) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Då $\det \mathbf{f}'(P) = -2$, så har vi inversen

$$(\mathbf{f}^{-1})' = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}$$

och svaren kan avläsas element för element.

2. (a) Upprepad integration, t ex först i y-led över $1 \leq y \leq 2/x$, sedan i x-led över $1 \leq x \leq 2$ ger oss svaret $\ln 4 - \frac{3}{4}$.
- (b) Differentialformen är *exakt* med potentialen $U(x, y) = xy^2 - 3x^2y$, och integralen beror då bara på start- och slutpunkt: $I = U(-3, 2) - U(2, 1) = -56$.
3. Vi maximerar alltså $f = xyz$ under bivillkoret $x + y + z = a$, $a > 0$, där $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Vi får då en kompakt mängd (triangel) på vilken f garanterat har både största och minsta värde enligt en sats. Minsta värdet (på hela randen av triangeln) är noll, i det inre är $f > 0$ och där finns maximum. Använd t ex Lagrange multiplikatormetod, som ger en enda kandidat till maximum, nämligen $x = y = z = a/3$ med $f_{max} = (a/3)^3$. På varje plan $x + y + z = a$ är alltså $xyz \leq (a/3)^3 = ((x + y + z)/3)^3$, varur den sökta olikheten följer i hela första oktanten.

4. Medelvärdet är

$$z_T = \frac{\iiint_K z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_K dx \, dy \, dz}$$

Båda integralerna beräknas med upprepad integration, snitta vinkelrätt mot z-axeln. Vi integrerar då först över cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq z$, sedan över intervallet $a \leq z \leq b$. Man får då

$$\iiint_K dx \, dy \, dz = \frac{\pi(b^3 - a^3)}{3}, \quad \iiint_K z \, dx \, dy \, dz = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{4}$$

och efter förenkling $z_T = \frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{4(a^2+ab+b^2)}$.

5. Ett fall för Stokes sats! Orienteringen av kurvan C gör att ytan Y (dvs $z = 2xy$ innanför C) ska ha normal "uppåt". Arbetet är då, med $\mathbf{r} = (x, y, 2xy)$, $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-2y, -2x, 1)$ och $D =$ enhetscirkelskivan,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_D (-2xy, -1, -3y^2) \cdot (-2y, -2x, 1) \, dx \, dy = \dots = -\frac{3\pi}{4}$$

Här har ett par termer kapats då deras integral över D blir noll av symmetriskäl, och polära koordinater har använts till slut. **Arbetet är $-3\pi/4$.**

6. Välj $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y}$, $y > 0$ och sätt $F(y) = \int_0^\infty f(x, y) \, dx$. Vår integral blir då $F''(1)/2$. Detta förutsätter att derivering kan flyttas in under integraltecknet, vilket ska motiveras (kommer här senare, liksom räknedetaljer!). Gör man på detta sätt, finner man att integralen blir $3\pi/16$.