Korta lösningsförslag till tentan 2013 03 16

1. (a) Funktionen $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$ har två stationära punkter.
Bestäm deras karaktärer (lokalt max/min eller sadelpunkt).

Lös ut de stationära punkterna: $f'_x = 2x = 0,\ f'_y = 3y^2 - 3 = 0$. Vi har två stationära punkter: $(0,1)$ och $(0,-1)$. För att avgöra deras karaktärer, beräknar vi den kvadratiska formen från Taylorpolynomet $Q(h,k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2)$ i vardera punkten. Eftersom$f''_{xx} = 2,\ f''_{xy} = 0,\ f''_{yy} = 6y$, så får vi för punkten $(0,1)$ $Q(h,k) = h^2 + 3k^2$ och för punkten $(0,-1)$ $Q(h,k) = h^2 - 3k^2$. Den förra kvadratiska formen är positivt definit, den senare indefinit. Detta betyder att $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ är ett **lokalt minimum** och $(\mathbf{0}, -\mathbf{1})$ är en **sadelpunkt**.

(b) Visa att ytorna $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ och $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$ skär varandra under rät vinkel i punkten $(1,-1,2)$.

Ytorna är nivåytor till var sin funktion $f(x,y,z)$ och $g(x,y,z)$. Genom insättning konstaterar vi att punkten $(1,-1,2)$ ligger i båda ytorna. Deras gradienter är vinkelräta mot ytornas tangentplan, så om de är sinsemellan vinkelräta, så är ytornas tangentplan vinkelräta mot varandra. Vi ska alltså kontrollera att gradienterna i punkten $(1,-1,2)$ är vinkelräta. $\nabla f = (2x, -2z + 3y^2, -2y),\ \nabla g = (2x, 4y, -2z)$. Vi sätter in punktens koordinater och tar skalärprodukten: $\nabla f(1,-1,2) \cdot \nabla g(1,-1,2) = (2,-1,2) \cdot (2,-4,-4)$
$= 0$, alltså skär ytorna varandra under rät vinkel i $(1,-1,2)$.

(c) Beräkna $\int_C zdx + xdy + ydz$ där C är räta linjen från $(1,1,2)$ till $(3,0,3)$.

Linjen kan parametriseras enligt $(x,y,z) = (1,1,2) + t(2,-1,1),\ 0 \le t \le 1$. Vi har $(x', y', z') = (2,-1,1)$ och $\int_C zdx + xdy + ydz = \int_0^1 (2+t, 1+2t, 1-t) \cdot (2,-1,1)\,dt = \int_0^1 (4-t)\,dt = \mathbf{\frac{7}{2}}$.

(d) Kan man beräkna $\frac{dy}{dx}$ ur ekvationen $y \cos x = x^2 + y^2$?
Gör detta och precisera villkoren.

Ekvationen kan skrivas som $F(x,y) = y\cos x - x^2 - y^2 = 0$ (nivåkurva). Enligt implicita funktionssatsen räcker det att $F'_y(a,b) \neq 0$ för att y lokalt kring (a,b) ska vara en $\mathcal{C}^1$-funktion av x. I en sådan punkt kan man derivera ekvationen implicit: $y'\cos x - y \sin x - 2x - 2yy' = 0$, vilket ger $\mathbf{y'} = \frac{\mathbf{y \sin x + 2x}}{\mathbf{\cos x - 2y}}$ (också $= -\frac{F'_x}{F'_y}$) i de punkter där $F'_y = \cos x - 2y \neq 0$.

2. En strömning har hastighetsfältet $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (2xz, x + z^2, z^2 + y)$. Beräkna flödet per tidsenhet av $\boldsymbol{v}$ ut ur det område som begränsas av koordinatplanen och planet $2x + 2y + z = 2$.

Området, som vi kallar K, begränsas av tetraedern med hörn i $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ och $(0,0,2)$. Dess rand utgörs av tre $\mathcal{C}^1$-ytor, fältet är $\mathcal{C}^1$. Då kan vi använda Gauss sats för flödet ut från området:

$$\Phi = \iint_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, dxdydz = \iiint_K 4z\, dxdydz$$

Integralen kan beräknas med upprepad integration på olika sätt, här återges två.

Variant I
Om vi lägger ett snitt vinkelrätt mot z-axeln, får vi (projicerat på xy-planet) triangeln $D_z = \{(x,y) : x + y = 1 - \frac{z}{2}\}$ för varje z mellan 0 och 2. Vi dubbelintegrerar över denna mängd, vilket ger (då integranden inte beror på x eller y) $4z$ gånger arean av triangeln, som är $\frac{1}{2}(1 - \frac{z}{2})^2$. Sedan integreras resultatet i z-led från 0 till 2. Alltså:

$$\Phi = \int_0^2 4z\, dz \iint_{D_z} dxdy = \int_0^2 4z \frac{1}{2}(1 - \frac{z}{2})^2\, dz = \int_0^2 (2z - 2z^2 + \frac{z^3}{2})\, dz = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Variant II
Om D står för randytan i xy-planet, dvs $D = \{(x,y) : x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$, så kan vi först integrera i z-led från $z = 0$ till $z = 2 - 2x - 2y$ och sedan dubbelintegrera resultatet över D:

$$\Phi = \iint_D dxdy \int_0^{2-2x-2y} 4z\, dz = \iint_D 2(2 - 2x - 2y)^2\, dxdy = 8 \iint_D (1 - x - y)^2\, dxdy =$$
$$= 8 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)^2\, dy = 8 \int_0^1 dx \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} = 8 \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3}\, dx =$$
$$= 8 \left[-\frac{(1-x)^4}{12} \right]_0^1 = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

3. En partikel påverkas av kraftfältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2 - y^3 + z, x^3 + y - z^2, -x + y^2 + z^3)$. Beräkna det arbete som uträttas då partikeln rör sig ett varv moturs sett "uppifrån" längs skärningskurvan mellan konen $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z > 0$, och paraboloiden $x^2 + y^2 + 2z = 3$.

För att få fram enklare uttryck för skärningskurvan, behandlar vi ekvationssystemet av de två ytorna:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2 &= 0 \\ x^2+y^2+2z &= 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 &= z^2 \\ z^2+2z &= 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 &= z^2 \\ z &= -1 \pm 2 \end{cases}$$

Eftersom konen skulle tas för positiva z, får vi fram att $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ (enhetscirkeln med centrum i $(0,0,1)$ i ett plan parallellt med xy-planet). Låt Y vara den plana ytan $(z = 1)$ innanför denna cirkel. Om Y ges normalriktning "uppåt" så blir den orientering som kurvan har i uppgiften den rätta för att tillämpa Stokes sats. Ytan, dess randkurva och fältet är alla $\mathcal{C}^1$, så det går bra med Stokes sats, enligt vilken det sökta arbetet är

$$W = \int_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N} dS = \iint_D (2y+2z, 2, 3x^2+3y^2) \cdot (0,0,1)\, dxdy = \iint_D (3x^2+3y^2)\, dxdy$$

Här är D enhetscirkelskivan i xy-planet, och vi räknar ut integralen med polära koordinater:

$$W = 2\pi \int_0^1 (3r^2) r\, dr = \mathbf{\frac{3\pi}{2}}.$$

4. Bestäm största värdet av $ax + by$, där a och b är positiva konstanter, på kurvstycket $x^4 + y^4 = 1,\ x > 0,\ y > 0$. Glöm inte att motivera existensen av detta maximum.

Vi ska maximera $f(x,y) = ax + by$ under bivillkoret $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0,\ x > 0,\ y > 0$. Om vi adderar punkterna $(1,0)$ och $(0,1)$ till kurvstycket, utgör det en kompakt mängd. Då f är kontinuerlig, vet vi att f har största och minsta värde i den mängden. Så de kandidater till max- och min-värden som hittas på kurvstyckets "inre" del, ska jämföras med $f(1,0) = a$ och $f(0,1) = b$.

Om ett maximum eller minimum ligger på kurvan $g = 0,\ x > 0,\ y > 0$, så måste f och g ha parallella gradienter i punkten. Eftersom $\nabla g = (4x^3, 4y^3) \neq (0,0)$ på kurvan, innebär det att en sådan punkt är lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \nabla f &= \lambda \nabla g \\ g &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= 4\lambda x^3 \\ b &= 4\lambda y^3 \\ x^4+y^4 &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay^3 &= bx^3 \\ x^4+y^4 &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}} \\ y &= \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}} \end{cases}$$

Vi får i denna enda lösning värdet $f = \left(a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$, vilket är större än både $f(1,0) = a$ och $f(0,1) = b$. På den utökade slutna kurvbiten måste alltså minsta värdet vara ett av talen a och b, medan det största är det vi funnit däremellan. Det finns alltså ett största värde på det givna kurvstycket och detta värde är $\left(\mathbf{a}^{\frac{4}{3}} + \mathbf{b}^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

5. Beräkna arean av ellipsoidytan som ges av ekvationen $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$
Ifall det skulle behövas, får du använda att $\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}))$.

Uppgiften kan lösas på lite olika sätt, men här prövar vi att parametrisera med (ellipsoida) rymdpolära koordinater: $\boldsymbol{r}(u,v) = (\sqrt{2}\sin u \cos v, \sqrt{2}\sin u \sin v, \cos u)$ med $(u,v) \in D = \{\ 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v < 2\pi\}$. Genom att integrera beloppet av normalvektorn $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ över D får vi arean. En kalkyl ger oss snart
$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = \sin u(\sqrt{2}\sin u \cos v, \sqrt{2}\sin u \sin v, 2\cos u)$ och därmed $|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| = \sqrt{2}\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}$. Via substitutionen $t = \cos u$ får vi arean till

$$\iint_D \sqrt{2}\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}\, dudv = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \sin u\sqrt{1+\cos^2 u}\, du = 4\sqrt{2}\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt$$

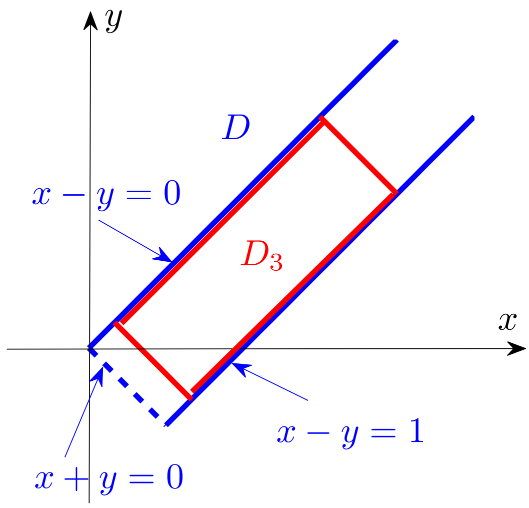
Om vi använder insättning av gränserna i den bifogade primitiva funktionen så får vi arean lika med $\mathbf{2\pi(2 + \sqrt{2}\ln(1 + \sqrt{2})}$.

6. För vilka reella tal α konvergerar den generaliserade dubbelintegralen
$\iint_D \frac{(x+y)^\alpha}{1+x^2-y^2}\,dxdy$, där $D = \{(x,y) : 0 < x+y < \infty,\ y \le x \le y+1\}$?

Området D är uppenbart obegränsat, men även integranden $f(x,y)$ är obegränsad i D, både för negativa och positiva α. Vi väljer en *uttömmande följd* av delmängder $\{D_n\}_1^\infty$, där $D_n = \{(x,y) : \frac{1}{n} \le x+y \le n,\ y \le x \le x+1\}$. Då gäller att $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots$ och för alla punkter $x \in D$ gäller att $x \in D_n$ för något n. Eftersom vår integrand är icke-negativ i hela D så räcker det att undersöka om

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

existerar, och detta gränsvärde är i så fall enligt teorin samma för alla uttömmande följder av delmängder, och är också värdet av vår integral.



Variabelbytet $u = x-y,\ v = x+y$ ger

$$\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D_n'} \frac{v^\alpha}{1+uv}\,dudv = \int_{\frac{1}{n}}^{n} v^\alpha\,dv \int_0^1 \frac{1}{1+uv}\,du = \int_{\frac{1}{n}}^{n} v^{\alpha-1}\ln(1+v)\,dv$$

För positiva v nära 0 har vi att $\frac{v}{2} < \ln(1+v) < v$ och därmed $\frac{v^\alpha}{2} < v^{\alpha-1}\ln(1+v) < v^\alpha$, så $\int_0^1 v^{\alpha-1}\ln(1+v)\,dv$ är konvergent precis när $\int_0^1 v^\alpha\,dv$ är konvergent, dvs då $\alpha > -1$ (här använder vi jämförelsekriteriet för generaliserade enkelintegraler med icke-negativ integrand).

För stora v är
$v^{\alpha-1}\ln v < v^{\alpha-1}\ln(1+v) < 2v^{\alpha-1}\ln v$ och $\int_1^n v^{\alpha-1}\ln v\,dv = \{\text{substituera } t = \ln v\} = \int_0^{\ln n} e^{\alpha t} t\,dv$
Här vet vi att integralen $\int_0^\infty e^{\alpha t} t\,dv$ konvergerar precis då $\alpha < 0$, vilket enligt jämförelsekriteriet genom dubbelolikheten medför att integralen av termen i mitten också konvergerar precis då $\alpha < 0$.

Sammantaget visar detta att vår generaliserade dubbelintegral är **konvergent då $-1 < \alpha < 0$, divergent annars**.