Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2013 08 26 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Christoffer Standard tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2013 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1213

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper. /LF

---

1. (a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z(1 + x^2) = 1 + y^3$ i punkten $(1, 1, 1)$. (3p)

   (b) Funktionen $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$ har en enda stationär punkt. Bestäm den och avgör dess karaktär. (3p)

   (c) Ange matrisen för den linjära avbildning som lokalt kring $(1, -1)$ approximerar $\boldsymbol{f}(x, y) = (x^2 + y^3, xy)$. (2p)

   (d) Funktionen f definieras av att $f(0, 0) = 0$ och $f(x, y) = \dfrac{xy - x^3}{x^2 + y^2}$ annars. Avgör om f har partiella derivator i origo, samt om f är differentierbar i origo. (3p)

2. (a) Skriv den upprepade integralen $\displaystyle\int_0^2 \Big(\int_0^{y^2} f(x, y)\,dx\Big)\,dy$ som en upprepad integral i omvänd integrationsordning. (2p)

   (b) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^2}\,dxdy$, då $D = \{(x, y) : x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 > 1\}$. (5p)

3. Bestäm värdemängden till $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ då definitionsmängden bestäms av villkoren $x + y + z = a$ och $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$. (7p)

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma (yz^2 + z,\ xz^2,\ 2xyz + x^2z^2) \cdot d\boldsymbol{r}$, där γ är skärningskurvan mellan ytorna $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ och $z = y + 1$, orienterad så att dess projektion på xy-planet genomlöps i positiv led. (7p)

5. Studera ekvationen $ze^{z-x} = xy$ i närheten av punkten $(1, 1, 1)$. Motivera att ekvationen i en omgivning av $(1, 1, 1)$ definierar en funktion $z = f(x, y)$ och att denna funktion har en Taylorutveckling av godtyckligt gradtal kring $(x, y) = (1, 1)$. Bestäm också Taylor-polynomet av grad 2. (7p)

6. Låt Y vara en $\mathcal{C}^1$ begränsningsyta till en kropp K i halvrummet $z \geq 0$, med normal ut från K. Bevisa olikheten $\displaystyle\iint_Y (y - xy^2ze^{-z^2},\ x - x^2yze^{-z^2},\ 1 - e^{-z^2}) \cdot \boldsymbol{N}dS \leq \pi$. (7p)

7. Formulera och bevisa under lämpliga förutsättningar *kedjeregeln* för en funktion $f \circ g$, där g är en funktion av en variabel med värden i $\mathbb{R}^n$ och f en reellvärd funktion av n variabler (du får gärna välja $n = 2$ om du vill). (7p)

8. Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett vektorfält definierat i en mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Antag att kurvintegralen av $\boldsymbol{F}$ är oberoende av vägen i Ω, och visa under lämpliga förutsättningar på $\boldsymbol{F}$ och Ω att fältet har en potential i Ω. (7p)