# Korta lösningsförslag till tentan 2013 08 26

Obs! Här ges inte alla detaljer i räkningarna, ofta bara en beskrivning av hur man ska gå tillväga.

1. (a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z(1+x^2) = 1 + y^3$ i punkten $(1,1,1)$.

---

Med $f(x,y,z) = z(1+x^2) - 1 - y^3$ är ytan en nivåyta: $f(x,y,z) = 0$. För denna gäller att gradienten till $f$ i $(1,1,1)$ är normalvektor till tangentplanet i denna punkt. Vi får $\nabla f(x,y,z) = (2xz, -3y^2, 1+x^2)$, $\nabla f(1,1,1) = (2,-3,2)$ och planets ekvation: $(2,-3,2)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0 \iff \mathbf{2x - 3y + 2z = 1}$.

(b) Funktionen $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x - y + 1$ har en enda stationär punkt. Bestäm den och avgör dess karaktär.

---

Den stationära punkten är lösning till systemet $f'_x = 0,\ f'_y = 0 \iff 2x - y - 1 = 0,\ -x + 2y - 1 = 0 \iff x = 1,\ y = 1$. Punkten $(1,1)$ är den enda stationära punkten. Dess karaktär avgörs av den kvadratiska formen $(f''_{xx}h^2 + 2f''xyhk + f''_{yy})/2 = h^2 - hk + k^2 = (h-k/2)^2 + 3k^2/4$, vilken här är positivt definit. Detta betyder att $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ är en **lokal minimipunkt**.

(c) Ange matrisen för den linjära avbildning som lokalt kring $(1,-1)$ approximerar $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2+y^3, xy)$.

---

Det som efterfrågas är funktionalmatrisen i $(1,-1)$, som är,
med $\boldsymbol{f} = (u,v),\ u'_x = 2x,\ u'_y = 3y^2,\ v'_x = y,\ v'_y = x$:

$$\begin{bmatrix} u'_x(1,-1) & u'_y(-1,1) \\ v'_x(1,-1) & v'_y(-1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Funktionen $f$ definieras av att $f(0,0) = 0$ och $f(x,y) = \dfrac{xy - x^3}{x^2+y^2}$ annars.
Avgör om $f$ har partiella derivator i origo, samt om $f$ är differentierbar i origo.

---

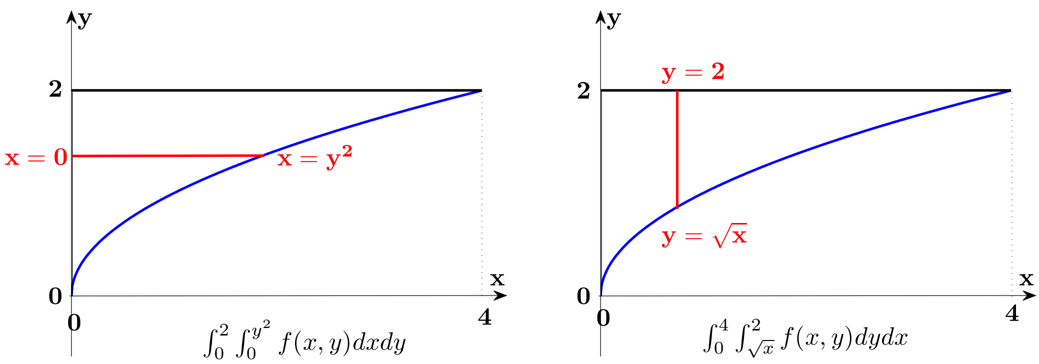
$f(x,0) = -x,\ f(0,y) = 0$. Härav får vi $f'_x(0,0) = -1,\ f'_y(0,0) = 0$, så de partiella derivatorna existerar i origo. Å andra sidan är $f$ inte ens kontinuerlig i origo, eftersom $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ medan $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{1}{2}$. Eftersom en differentierbar funktion måste vara kontinuerlig, är $f$ inte differentierbar.

2. (a) Skriv den upprepade integralen $\displaystyle\int_0^2 \left( \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy$ som en upprepad integral i omvänd integrationsordning.

(b) Beräkna den generaliserade dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdy$,
då $D = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 > 1\}$.

---

(a) De röda linjerna i figurerna visar hur den första (inre) integrationen uppfattas i vardera fallet. I den första figuren har $y$ ett fixt värde mellan 0 och 2, medan $x$ löper från y-axeln till kurvan $x = y^2$. I den andra figuren har $x$ ett fixt värde mellan 0 och 4, medan $y$ löper från kurvan $y = \sqrt{x}$ till linjen $y = 2$. Svaret finns i den andra figuren.




(b) Mängderna $D_n = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ 1 < x^2+y^2 < n^2\}$ utgör en uttömmande följd för $D$, och integranden är positiv i hela $D$. Vi kan då beräkna integralen som gränsvärdet av integralen över $D_n$ då $n \to \infty$. Använd polära koordinater, då får vi efter att ha integrerat vinkeln

$$\iint_{D_n} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{r}{1+r^4}\,dr = \left[ s = r^2 \right] = \frac{\pi}{4}\int_1^{n^2} \frac{1}{1+s^2}\,ds = \frac{\pi}{4}(\arctan n^2 - \frac{\pi}{4})$$

Gränsvärdet då $n \to \infty$ är vårt svar: $\boldsymbol{\dfrac{\pi^2}{16}}$

3. Bestäm värdemängden till $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ då definitionsmängden bestäms av villkoren $x + y + z = a$ och $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ (a > 0)$.

---

Definitionsmängden är skärningskurvan mellan ett plan och enhetssfären, dvs en cirkel i rummet. Denna mängd är kompakt och målfunktionen $f$ är kontinuerlig. Med stöd av en sats om kontinuerliga funktioner innebär detta att största och minsta värdena existerar, och då cirkeln är en bågvis sammanhängande mängd garanterar en annan sats att alla värden däremellan antas, så värdemängden är ett slutet intervall.

Då varje punkt på cirkeln är en inre punkt till snittet mellan definitionsmängderna till $f$ och de båda bivillkorsfunktionerna som ges, så vet vi att största och minsta värdena antas i punkter där nämnda tre funktioners gradienter är linjärt beroende. Om vi gör en 3x3-matris av dessa gradienter (rader eller kolonner), så inträffar linjärt beroende precis då matrisens determinant är noll. Man finner snart att detta inträffar då $x = y$ eller $y = z$ eller $z = x$. Av symmetriskäl inses att det räcker att undersöka ett av dessa fall för att hitta de båda extremvärdena. T ex $x = y$ insatt i bivillkoren ger oss två punkter: $(0, 0, a)$ och $(2a/3, 2a/3, -a/3)$. Sätt in i $f$ och erhåll största respektive minsta värdena.

Svar: $\mathcal{V}_\mathbf{f} = [\mathbf{\frac{5a^3}{9}}, \mathbf{a^3}]$

4. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma (yz^2+z,\ xz^2,\ 2xyz+x^2z^2)\cdot d\boldsymbol{r}$, där $\gamma$ är skärningskurvan mellan ytorna $x^2+y^2+4z^2 = 4$ och $z = y + 1$, orienterad så att dess projektion på $xy$-planet genomlöps i positiv led.

---

ett fall för Stokes sats. Kurvintegralen ersätts av en ytintegral av rotationen av fältet $\boldsymbol{F}$ över planet $Y$ (inom sfären) med normal "uppåt". Med x och y som parametrar för planet, integrerar vi över området $D$ innanför kurvans projektion på xy-planet. Detta område är (lös systemet av de två ytornas ekvationer för att få skärningskurvan)

$$x^2 + 5(y + 4/5)^2 \leq 16/5 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y + \frac{4}{5})^2}{b^2} \leq 1 \text{ där } a = \frac{4}{\sqrt{5}},\ b = \frac{4}{5}$$

dvs en ellipsskiva med halvaxlarna $a = 4/\sqrt{5}$ och $b = 4/5$. Vår ytintegral blir nu

$$\iint_Y \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_D (0, 1 - 2xz^2, 0) \cdot (0, -1, 1)\, dx\, dy = \iint_D (2xz^2 - 1)\, dx\, dy$$

Den ickekonstanta termen integreras av symmetriskäl till noll. Kvar blir integranden -1, så resultatet bli minus arean av $D$, dvs $-\pi ab$. Svar: $-\mathbf{\frac{16\pi}{5\sqrt{5}}}$

5. Studera ekvationen $ze^{z-x} = xy$ i närheten av punkten $(1, 1, 1)$. Motivera att ekvationen i en omgivning av $(1, 1, 1)$ definierar en funktion $z = f(x, y)$ och att denna funktion har en Taylorutveckling av godtyckligt gradtal kring $(x, y) = (1, 1)$. Bestäm också Taylorpolynomet av grad 2.

---

Skriv ekvationen på formen $F(x, y, z) = 0$. Implicita funktionssatsen garanterar $z = f(x, y)$ som $\mathcal{C}^1$-funktion lokalt kring $(1, 1, 1)$ förutsatt att $F'_z(1, 1, 1) \neq 0$. Då detta visar sig gälla $(F'_z(1, 1, 1) = 2)$, så kan vi derivera ekvationen $F(x, y, f(x, y))$ med avseende på $x$ och $y$. Exempelvis vid x-deriveringen får vi

$$F'_x(x, y, f(x, y)) + F'_z(x, y, f(x, y))f'_x(x, y) = 0$$

Med $f'_x(x, y)$ ersatt med $z$ får vi en ny ekvation av typen $G(x, y, z) = 0$:

$$F'_x(x, y, f(x, y)) + F'_z(x, y, f(x, y))z = 0$$

$z$-derivatan av dess vänsterled i $(1, 1, 1)$ är ju åter $F'_z(1, 1, 1) = 2$, och om vänsterledet bara är $\mathcal{C}^1$, så blir också den lokala lösningen $z = f'_x(x, y)$ en ny $\mathcal{C}^1$-funktion. Eftersom $F(x, y, z) = ze^{z-x} - xy$ är $\mathcal{C}^\infty$ så är det bara att köra på med obegränsat antal deriveringar, i varje steg är den kritiska $z$-derivatan densamma. Därför finns också Taylorpolynomet av varje önskat gradtal nära $(1, 1, 1)$. Efter en x- och en y-derivering sätter vi in $x = 1,\ y = 1,\ z = 1$ i de erhållna ekvationerna och löser ut derivatornas värden $f'_x(1, 1) = 1,\ f'_y(1, 1) = 1/2$. Vi deriverar en andra gång med avseende på x och y i dessa uttryck och kan då lösa ut andraderivatorna:
$f''_{xx}(1, 1) = 0,\ f''_{xy}(1, 1) = f''_{yx}(1, 1) = 1/4, +f''_{yy}(1, 1) = -3/8$. Då får vi Taylorpolynomet av andra graden:

$$\mathbf{1 + (x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) + \frac{1}{4}(x - 1)(y - 1) - \frac{3}{16}(y - 1)^2}$$

6. Låt $Y$ vara en $\mathcal{C}^1$ begränsningsyta till en kropp $K$ i halvrummet $z \geq 0$, med normal ut från $K$. Bevisa olikheten $\iint_Y (y - xy^2 ze^{-z^2},\, x - x^2 yze^{-z^2},\, 1 - e^{-z^2}) \cdot \boldsymbol{N} dS \leq \pi$.

---

Förutsättningarna för Gauss sats är uppfyllda. Med det givna fältet $= \boldsymbol{F}$ har vi $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = ze^{-z^2}(2 - x^2 - y^2)$, så enligt Gauss sats är vår integral lika med $\iiint_K ze^{-z^2}(2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy\, dz$. Denna integral blir så stor som möjligt om $K$ är hela det område där integranden är $\geq 0$. Genom att alltså välja $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2,\ z \geq 0\}$ så får vi en övre begränsning för vår integral för alla tänkbara val av $K$. Vi beräknar denna generaliserade integral:

$$\iiint_K ze^{-z^2}(2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^\infty ze^{-z^2}\, dz \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (2 - x^2 - y^2)\, dx\, dy = \ldots = \pi$$

varav alltså olikheten följer.