Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2014-01-14

1. (a) Riktningsvektor: $\boldsymbol{u} = (2,3,2,2) - (1,2,1,1) = (1,1,1,1)$, normerad: $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$.
Gradient: $\nabla f(x,y,z,t) = (y, x - zt, -yt, -yz)$
Riktningsderivatan $f_{\mathbf{v}}(1,2,1,1) = \mathbf{v} \cdot \nabla f(1,2,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \cdot (2,0,-2,-2) = \mathbf{-1}$

(b) Vi kontrollerar att $\nabla f(0,0) = (0,0)$, vilket visar sig stämma. Vi ser att $f(0,0) = 0$ och $f(x,x) = x^3$, dvs på linjen $y = x$ passeras origo i detsamma som f byter tecken. $(0,0)$ är **sadelpunkt**.

(c) Sätt $F(x,y) = xy + 2 - \ln(x+y)$, vår ekvation är då en nivåyta till denna funktiom: $F(x,y) = 0$. Implicita funktionssatsen: om F är en $\mathcal{C}^1$-funktion och om $F'_y(2,-1) \neq 0$, så definierar nivåytan y som en $\mathcal{C}^1$-funktion av x i en omgivning av $(2,-1)$. Här är $F'_y = x - \frac{1}{x+y}$, så $F'_y(2,-1) = -1 \neq 0$. Vidare säger satsen att $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{y - \frac{1}{x+y}}{x - \frac{1}{x+y}}$. Detta ger oss $\mathbf{y'(2) = 2}$.

(d) Inversa funktionssatsen lovar lokal $\mathcal{C}^1$-inverterbarhet kring en punkt om funktionaldeterminanten i punkten är nollskild.

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 1 \\ -1 & e^y \end{vmatrix} = e^{x+y} + 1 \neq 0$$

Lokal inverterbarhet med $\mathcal{C}^1$-invers föreligger alltså kring varje punkt i planet. Funktionalmatriserna för funktionen och dess invers är varandras inversmatriser:

$$\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$ Så $\mathbf{x'_u = y'_u = y'_v = \frac{1}{2}},\ \mathbf{x'_v = -\frac{1}{2}}$

2. Med hjälp av kedjeregeln byter vi ut x- och y-derivatorna mot u- och v-derivator:

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u 4x + z'_v y, \quad z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u(-6y) + z'_v x$$

Vår partiella differentialekvation får nu utseendet

$(3y^2 + 2x^2) z'_v = 0$ dvs $z'_v = 0$

Lösningen är alltså av formen $z = g(u) = g(2x^2 - 3y^2)$, där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion. Villkoret $z(x,0) = x^4$ ger $g(2x^2) = x^4$, ur vilket vi ser ($u = 2x^2$) att $g(u) = (\frac{u}{2})^2$. Slutligen har vi därmed lösningen

$$\mathbf{z = \frac{(2x^2 - 3y^2)^2}{4}}$$

3. (a) Vårt fält har potentialen $U(x,y) = x^3 y + \sin x + e^y$, integralen beror bara på start- och slutpunkterna och är $U(2,1) - U(1,0) = \mathbf{7 + e + \sin 2 - \sin 1}$

(b) Vi kan beräkna flödet ut genom randen av kroppen $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ z \geq 0\}$ med Gauss sats (fältet är $\mathcal{C}^1$), men får då med flödet ner genom cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = 0$. Detta flöde blir dock noll, eftersom fältet där är $(0, x^2 y, 0)$ och normalvektorn är $(0,0,-1)$, skalärprodukten som integreras är noll. Totala flödet ut från K ges alltså med Gauss sats:

$$\iint_{\partial K} (0, x^2 y, y^2 z) \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K div(0, x^2 y, y^2 z) dxdydz = \iiint_K (x^2 + y^2) dxdydz$$

Av symmetriskäl är detta hälften av integralen över hela klotet av samma integrand, vilken sedan är två tredjedelar av integralen av $x^2 + y^2 + z^2$ över hela klotet. Vårt flöde är därmed

$$\frac{1}{3} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \Big(\text{rymdpolära koordinater}\Big) = \frac{1}{3} \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{a^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi = \mathbf{\frac{4\pi a^5}{15}}$$

4. Massan är trippelintegralen av densiteten över hela kroppen K, vilket med bruk av rymdpolära koordinater blir

$$m = \iiint_K (x^2 + y^2) dxdydz = \iiint_{K'} (r \sin\theta)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3\theta d\theta \int_0^1 r^4 dr$$

Här utnyttjas att konen $z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$ lutar vinkeln $\frac{\pi}{6}$ mot positiva z-axeln. Den mellersta integralen löser vi med substitutionen $t = \cos\theta$. Vi får:

$$m = 2\pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 (1 - t^2) dt \cdot \frac{1}{5} = 2\pi \frac{16 - 9\sqrt{3}}{24} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{\mathbf{60}} (\mathbf{16 - 9\sqrt{3}})$$

5. Funktionsgraferna är slutna mängder, deras snitt C (dvs skärningskurvan) är då slutet. Eftersom $z = \arctan(x^3y^2)$ är begränsad i z-led av $\pm\frac{\pi}{2}$ och ytan $x^2 + 4y^2 = 10$ är en elliptisk cylinder, begränsad i x- och y-led, så är skärningskurvan C också begränsad och enligt tidigare sluten, därmed kompakt. Funktionen $f(x, y, z) = z$ är kontinuerlig och har därmed enligt sats både största och minsta värde på C. Återstår att hitta dessa. En metod som faktiskt fungerar är att eliminera y med hjälp av cylinderekvationen och uttrycka z enbart i variabeln x. Derivera osv! En annan är att se problemet som ett bivillkorsproblem: sök max och min av $f(x, y, z) = z$ under bivillkoren $g(x, y, z) = \arctan(x^3y^2) - z = 0$ och $h(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 10 = 0$. Alla punkter på C är inre punkter till definitionsmängderna för f, g och h,därmed vet vi av teorin att de sökta extrempunkterna är punkter där de tre funktionernas gradienter är linjärt oberoende. Detta inträffar då och endast då determinanten av den matris i vilken gradienterna utgör rader är lika med noll. Vi söker lösningarna till

$$\frac{d(f,g,h)}{d(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3x^2y^2}{1+x^6y^4} & \frac{2x^3y}{1+x^6y^4} & -1 \\ 2x & 8y & 0 \end{vmatrix} = \frac{4x^2y(6y^2 - x^2)}{1 + x^6y^4} = 0$$

f kan uppenbarligen anta både positiva och negativa värden, så lösningar med $x = 0$ eller $y = 0$ (som ger $f = 0$) kan vi bortse ifrån när det gäller max och min. Återstår $x^2 = 6y^2$. Detta i kombination med $x^2 + 4y^2 = 10$ ger oss punkterna med $x^2 = 6,\ y^2 = 1$. Vi beräknar z och finner att $\mathbf{z_{max}} = \arctan(\mathbf{6\sqrt{6}})$ och $\mathbf{z_{min}} = -\arctan(\mathbf{6\sqrt{6}})$. z-koordinaten varierar på C kontinuerligt mellan dessa värden.

6. Integranden är odefinierad i origo. Vi byter variabler: $u = x + y,\ v = y$, Jacobideterminanten blir 1. Området D motsvarar i uv-planet $D' = \{(u, v) : 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le u\}$.

$$\int_D \frac{ye^{-y}}{(x+y)^\alpha} dxdy = \int_{D'} \frac{ve^{-v}}{u^\alpha} dudv = \int_0^1 \frac{1}{u^\alpha} du \int_0^u ve^{-v} dv = \text{(part.int.)} = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - ue^{-u}}{u^\alpha} du$$

Om vi Taylorutvecklar täljaren, får vi $\frac{u^2}{2} + u^3B(u)$, där $B(u)$ är begränsad i en omgivning av $u = 0$. Detta ger att integranden $f(u)$ asymptotiskt är lika med $g(u) = \frac{1}{2u^{\alpha-2}}$ (i den meningen att kvoten mellan de positiva funktionerna $f(u)$ och $g(u)$ har gränsvärdet 1 då $u \to 0$). Vi vet då att integralerna av f och g samtidigt är konvergenta eller samtidigt divergenta. Vi vet också att $\int_0^1 g(u)du$ är konvergent då och endast då $\alpha - 2 < 1$, något som alltså gäller även för $\int_0^1 f(u)du$. Alltså **konvergent** $\iff \alpha < \mathbf{3}$.