Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2014 03 10 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Lennart Falk, 772 3564

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2014 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1314

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) För funktionen $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$ är både f'_x och f'_y noll i punkten $(0,-1)$. Avgör om $(0,-1)$ är en lokal maximipunkt, lokal minimipunkt eller en sadelpunkt. (2p)

   (b) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y) = 2x + y + \ln(1+xy)$ i punkten $(0,0)$ i riktningen $\pi/3$ räknat moturs från positiva x-axelns riktning. (3p)

   (c) Transformera uttrycket $-yz'_x + xz'_y$ till de nya variablerna $u = x^2 + y^2,\ v = y/x$. (3p)

   (d) Kurvan $(x,y) = (t - t^2, t - t^3),\ 0 \le t \le 1$, är enkel och sluten. Skriv upp en integral i parametern t som uttrycker arean som kurvan omsluter. Du behöver inte beräkna integralen. (2p)

2. Beräkna dubbelintegralen $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{2x-y}}\, dxdy$ där D är parallellogramytan med hörn i punkterna $(1,1),\ (2,0),\ (1,-2),\ (0,-1)$. (7p)

3. (a) Beräkna arean av den del av ytan $z = xy$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 = 16$. (4p)

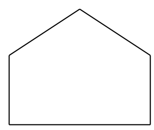
   (b) I en rät cirkulär kon med höjden H och basradien R är densiteten proportionell mot avståndet till basytan, samt är lika med δ i konens spets. Beräkna konens massa. (5p)

4. Beräkna på två sätt kurvintegralen $\displaystyle\int_C -y\,dx + x\,dz$ längs den slutna kurvan C som är skärningen mellan ytorna $z = y^2$ och $x^2 + y^2 = 4$ med orientering moturs sett ”uppifrån”. (7p)

   (a) genom att använda en parametrisering av C,

   (b) genom att använda Stokes sats.

5. Femhörningen i figuren byggs upp av tre rektangelsidor och två lika långa sidor i en triangel. Dess omkrets är 1. Bestäm femhörningens sidor så att den omsluter maximal area. (7p)



6. För vilka reella tal p konvergerar integralen $\displaystyle\iint_D |x^2 - y^2|(|x| + |y|)^{-p}\, dxdy$, där D är enhetscirkelskivan? Beräkna dess värde för sådana p. (7p)

7. Formulera och bevisa satsen om *Taylors formel* i två variabler. (7p)

8. (a) Formulera Gauss sats. (2p)

   (b) Härled formeln

$$\iiint_D (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdydz = \iint_{\partial D} (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \boldsymbol{N}\, dS$$

   under följande förutsättningar: f och g är $\mathcal{C}^2$-funktioner, D, ∂D och $\boldsymbol{N}$ är som i Gauss sats. Symbolen Δ står för Laplaceoperatorn $\nabla\cdot\nabla$. (4p)