Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2014-03-10

1. (a) Vi konstaterar att $f'_x = 2x$ och $f'_y = 3y^2 - 3$ båda är noll i $(0, -1)$, så det är verkligen en stationär punkt. Vi beräknar andraderivatorna: $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy}(0, -1) = 0$, $f''_{yy} = 6y$ och den kvadratiska formen i Taylors formel $Q(h, k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(0, -1)h^2 + 2f''_{xy}(0, -1)hk + f''_{yy}(0, -1)k^2) = h^2 - 3k^2$, som är indefinit, eftersom $Q(1, 0) = 1$ och $Q(0, 1) = -3$ (olika tecken). Punkten är då en **sadelpunkt**.

   (b) En enhetsvektor i den angivna riktningen är $\boldsymbol{v} = (\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, gradienten $\nabla f(x, y) = (2 + \frac{y}{1+xy}, 1 + \frac{x}{1+xy}) = (2, 1)$ i punkten $(0, 0)$. Då är riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(0, 0) = \boldsymbol{v} \cdot \nabla f(0, 0) = \mathbf{1} + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

   (c)
$$-yz'_x + xz'_y = -y(z'_u \cdot 2x + z'_v \cdot (-\frac{y}{x^2}) + x(z'_y \cdot 2y + z'_v(\frac{1}{x}))) = (-\frac{y^2}{x^2} + 1)z'_v = (\mathbf{v^2 + 1})\mathbf{z'_v}$$

   (d) Svar: Man kan beräkna arean av området, som vi kallar D, med Greens formel, som
$$A = \iint_D 1\, dxdy = \int_{\partial D} -y\, dx = \int_{\partial D} x\, dy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\, dx + x\, dy$$
om ∂D genomlöps i positiv led, vilket är fallet här (titta på tangentvektorns riktning i olika punkter). Detta ger
$$\mathbf{A} = \int_\mathbf{0}^\mathbf{1} -(\mathbf{t} - \mathbf{t^3})(\mathbf{1} - \mathbf{2t})\,\mathbf{dt} \text{ eller } \mathbf{A} = \int_\mathbf{0}^\mathbf{1} (\mathbf{t} - \mathbf{t^2})(\mathbf{1} - \mathbf{3t^2})\,\mathbf{dt}$$
om vi nöjer oss med de första två varianterna (ett svar räcker förstås). Vill man inte kontrollera orienteringen av kurvan, kan man sätta absolutbelopp kring integralen.

2. Vi ser snart att paralellogrammens hörn är skärningspunkterna mellan de räta linjerna $x + y = -1$, $x + y = 2$ och $2x - y = 1$, $2x - y = 4$ (två par av parallella linjer). Så vi byter variabler till $u = x + y$, $v = 2x - y$ och får Jacobianen $J^{-1} = -3 \Rightarrow |J| = \frac{1}{3}$ och med $D' = \{(u, v) : -1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 4$ får vi
$$\iint_D \frac{x + y}{\sqrt{2x - y}}\, dxdy = \frac{1}{3}\iint_{D'} \frac{u}{\sqrt{v}}\, dxdy = \frac{1}{3}\int_{-1}^2 u\, du \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{v}}\, dv = \frac{1}{3}\Big[\frac{u^2}{2}\Big]_{-1}^2 \Big[2\sqrt{v}\Big]_1^4 = \mathbf{1}$$

3. (a) Ytan kan beskrivas med x och y som parametrar: $\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, xy)$, $x^2 + y^2 \le 16$. Då är $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-y, -x, 1)$ och arean är, med $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 16\}$:
$$\iint_D |\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y|\, dxdy = \iint_D \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dxdy = \{\text{ polära koordinater}\} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 \sqrt{r^2 + 1}\, r\, dr =$$
$$= 2\pi\Big[\frac{1}{3}(r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4 = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{3}}(\mathbf{17^{\frac{3}{2}} - 1})$$

(b) Lägg (t. ex.) konen K med basytan i xy-planet och spetsen i $(0, 0, H)$. Då är z avståndet från en punkt (x, y, z) i konen till dess basyta. Då har vi $\rho(z) = \frac{\delta}{H}z,\ 0 \le z \le H$, och massan blir

$$m = \iiint_K \frac{\delta}{H} z\, dxdydz = \int_0^H \frac{\delta}{H} z\, dz \iint_{x^2+y^2 \le r} dxdy$$

där r är radien i det cirkulära tvärsnittet av K på höjden z. Likformighet ger

$$\frac{r}{R} = \frac{H-z}{H} \quad \Rightarrow \quad r = R(1 - \frac{z}{H})$$

Nu blir

$$m = \int_0^H \frac{\delta}{H} z\pi R^2 (1 - \frac{z}{H})^2\, dz = \frac{\delta\pi R^2}{H} \int_0^H (z - \frac{2z^2}{H} + \frac{z^3}{H^2})\, dz = \frac{\delta\pi \mathbf{R^2 H}}{\mathbf{12}}$$

4. (a) En naturlig parametrisering är $(x, y, z) = (2\cos t, 2\sin t, 4\sin^2 t),\ \ 0 \le t \le 2\pi$. Då får vi

$$\int_C -ydx + xdz = \int_0^{2\pi} (-2\sin t(2\cos t)' + 2\cos t(4\sin^2 t)')dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\sin^2 t + 16\sin t\cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos 2t + 16\sin t\cos^2 t)dt = \mathbf{4}\pi$$

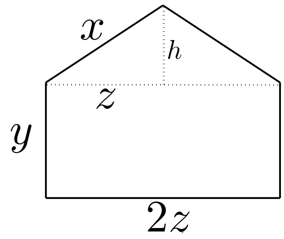
Räkningarna förkortas något om man inser att två sista termerna ger integralen noll p.g.a periodicitet och symmetri.

(b) C är randkurva till ytan Y som ges av ekvationen $z = y^2$ inom cylindern $x^2 + y^2 = 4$. Om vi parametriserar Y som $\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, y^2)$, så får vi normalvektorn $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (0, -2y, 1)$ åt rätt håll för Stokes sats, som får användas, då fältet är $\mathcal{C}^1$ och ytan Y är orienterad med sin rand som den ska. Eftersom $\nabla \times (-y, 0, x) = (0, -1, 1)$, så ger Stokes sats med $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 4\}$:

$$\int_C -ydx + xdz = \iint_Y \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_D (0, -1, 1) \cdot (0, -2y, 1)\, dxdy = \iint_D (2y + 1)\, dxdy = \mathbf{4}\pi$$

Här har vi utnyttjat att $2y$ integreras till noll av symmetriskäl (lätt att beräkna ändå) och att arean av D är $\pi 2^2$.

5. Man kan välja variabler på olika sätt, här låter vi sidlängderna heta x, y och 2z (det sista av praktiska skäl som kommer att framgå). h är en tillfälligt använd symbol.



Vi vill maximera arean, som är $A(x,y,z) = zh + 2yz = z\sqrt{x^2-z^2} + 2yz$ då omkretsen $2x + 2y + 2z$ är 1, eller med andra ord, maximera

$$A(x,y,z) = z\sqrt{x^2-z^2} + 2yz,\ D_A = \{(x,y,z) : x \geq 0,\ y \geq 0, x \geq z \geq 0\}$$

under bivillkoret

$$g(x,y,z) = x + y + z - \frac{1}{2} = 0$$

För att vara säker på att ett sådant maximum existerar, konstaterar vi att den undersökta mängden $K = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\} \cap D_A$ är en kompakt mängd, på vilket den kontinuerliga funktionen $A(x,y,z)$ måste ha både minsta och största värde. Enligt satsen om bivillkorsproblemet ska då gradienterna för A och g vara parallella i extrempunkter som är inre punkter till D_A och D_g. Återstår sedan att söka på "randen" av K, som utgörs av en triangel T på vars sidor $z = 0,\ y = 0$ eller $x = z$. På T urartar femhörningen till andra geometriska objekt som vi måste inbegripa i problemet ("defekta" femhörningar, se nedan!). Vi börjar med de inre extrempunkterna där vi konstaterar att villkoret att ∇A och $\nabla g = (1,1,1)$ är parallella är ekvivalent med att $A'_x = A'_y = A'_z$. Detta ger tillsammans med bivillkoret ekvationssystemet

$$\frac{xz}{\sqrt{x^2-z^2}} = 2z = \sqrt{x^2-z^2} - \frac{z^2}{\sqrt{x^2-z^2}} + 2y, \quad x + y + z = \frac{1}{2}$$

Den första likheten ger (då $z > 0$ här)

$$\sqrt{x^2-z^2} = \frac{x}{2},\ z = x\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Insättning av detta i den andra likheten ger sedan

$$y = x\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Uttrycken för y och z sätts slutligen in i $x + y + z = \frac{1}{2}$, och vi får

$$x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3},\ y = \frac{3-\sqrt{3}}{6},\ z = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

som enda lösning. Vi beräknar arean i denna punkt:

$$A = z\sqrt{x^2-z^2} + 2yz = x\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x}{2} + x(\sqrt{3}+1)x\frac{\sqrt{3}}{2} = x^2\frac{6+3\sqrt{3}}{4} = \cdots = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Eftersom det finns en "rand" T (snittet av randen till D_A med $\{g = 0\}$) till vårt område, måste vi också kontrollera denna.

För $z = 0$ är $A = 0$, vilket förstås är minimum.

För $y = 0, x + z = \frac{1}{2},\ x \geq 0,\ z \geq 0$ blir "femhörningen" en triangel med

$$A^2 = z^2(x^2 - z^2) = z^2((\frac{1}{2} - z)^2 - z^2) = \cdots = \frac{z^2}{4} - z^3,\ 0 \leq z \leq \frac{1}{4}$$

vilket (derivera!) har maximum för $z = \frac{1}{6},\ x = \frac{1}{3}$, med $A = \frac{\sqrt{3}}{36}$ (liksidig triangel med sidan $\frac{1}{3}$).

För $x = z,\ y + 2z = \frac{1}{2},\ y \geq 0,\ z \geq 0$ blir det en rektangel med

$$A = 2yz = 2(\frac{1}{2} - 2z)z = z - 4z^2,\ \ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}$$

vilket maximeras av $2x = y = 2z = \frac{1}{4}$, med $A = \frac{1}{16}$ (en kvadrat).

Vi har hittat tre kandidater: en femhörning, en liksidig triangel och en kvadrat. Observera att om den liksidiga triangeln eller kvadraten skulle vara större än femhörningen, så är den största "femhörningen" inte en äkta femhörning, men om vi jämför alla tre kandidaterna, finner vi dock att den riktiga femhörningen har störst area: $\frac{2-\sqrt{3}}{4} > \frac{1}{16} > \frac{\sqrt{3}}{36}$ (inses genom att $\frac{1}{16} > \frac{\sqrt{3}}{36} \iff 7 > 4\sqrt{3} \iff 81 > 48$ och att $\frac{2-\sqrt{3}}{4} > \frac{1}{16} \iff 7 > 4\sqrt{3} \iff 49 > 48$).
Störst area antas alltså då sidorna är

$\mathbf{x = \frac{2\sqrt{3}-3}{3},\ y = \frac{3-\sqrt{3}}{6},\ 2z = 2 - \sqrt{3}.}$

Även med en något mindre utförlig motivering, kan man få hela eller nästan hela poängen på denna uppgift! Det finns också andra variabelval som går bra, t. ex. med en av triangelns vinklar och x och y.

6. Av symmetriskäl är integralen över varje "halvkvadrant" av enhetscirkeln lika stor.
Så om $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x > y\}$, så är

$$I = \iint_D |x^2 - y^2|(|x| + |y|)^{-p}\, dxdy = 8\iint_E (x^2 - y^2)(x+y)^{-p}\, dxdy = 8\iint_E (x-y)(x+y)^{-p+1}\, dxdy$$

Vi byter till koordinaterna $u = x - y,\ v = x + y,\ J = \frac{1}{2}$, området blir då (ersätt x och y i olikheten för enhetscirkelskivan med u och v och kolla detta!)

$$E' = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 2,\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u < v\}$$

integralen blir

$$I = 4\iint_{E'} uv^{-p+1}\, dudv$$

och med polära koordinater och $F = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq \sqrt{2},\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ har vi

$$I = 4\iint_F r\cos\theta(r\sin\theta)^{-p+1} r\, drd\theta = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{-p+1}\cos\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^{3-p}\, dr$$

Allt detta är OK att skriva: om vi vill uttrycka oss utförligt med uttömmande följder av mängder $\epsilon < x^2 + y^2 \leq 1$ respektive $2\epsilon < u^2 + v^2 \leq 2$ där integranden är begränsad, så innebär det slutligen att integralen i variabeln r ska uppfattas som $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} r^{3-p}\, dr$, vilket är innebörden i det som står. Den integralen är ju konvergent för $3 - p > -1$, dvs för $p < 4$. Integralen i θ är oproblematisk, så hela integralen är konvergent om och endast om $p < 4$. Återstår att räkna ut den. Vi har då

$$\int_0^{\sqrt{2}} r^{3-p}\, dr = \left[\frac{r^{4-p}}{4-p}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2^{2-\frac{p}{2}}}{4-p}$$

och om $p \neq 2$ med $t = \sin\theta$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{-p+1}\cos\theta\, d\theta = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} t^{1-p}\, dt = \frac{1}{2-p}(1 - 2^{-1+\frac{p}{2}})$$

och för $p = 2$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{-1}\cos\theta\, d\theta = \Big[\ln\sin\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 2}{2}$$

Slutligen, för $p < 4,\ p \neq 2$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{16 \cdot 2^{-\frac{p}{2}}(1 - 2^{\frac{p}{2}-1})}}{\mathbf{(2-p)(4-p)}}$$

och för $p = 2$

$$\mathbf{I} = \mathbf{2}\ln\mathbf{2}$$

7. Se läroboken!

8. (a) Se läroboken!
   (b) Använd Gauss sats på $\boldsymbol{u} = f\nabla g - g\nabla f = (fg'_x, fg'_y, fg'_z) - (gf'_x, gf'_y, gf'_z)$, då får vi

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial x}(fg'_x - gf'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fg'_y - gf'_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fg'_z - gf'_z) = fg''_{xx} + fg''_{yy} + fg''_{zz} - (gf''_{xx} + gf''_{yy} + gf''_{zz}) = f\Delta g - g\Delta f$$

Sätt in i respektive integral i Gauss sats!