Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2014-08-25

1. (a) Vi har $f'_x = 1 - 2xy + y^2,\ f'_y = -1 + 2xy - y^2$ (och därmed $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = 0$ som sig bör). Vidare är $f''_{xx} = -2y,\ f''_{xy} = -2x + 2y,\ f''_{yy} = 2x$, så den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(1,1)h^2 + 2f''_{xy}(1,1)hk + f''_{yy}(1,1)k^2) = -h^2 + k^2$$

är tydligen *indefinit*: $Q(1,0) = -1 < 0,\ Q(0,1) = 1 > 0$. Därmed är punkten $(1,1)$ en **sadelpunkt**.

(b)

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \text{ (kedjeregeln) } = x(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}) + y(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}) =$$
$$= x(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}(-\frac{y}{x^2})) + y(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{1}{x}) = x\frac{\partial z}{\partial u} = \mathbf{u}\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{u}}$$

(c) Ekvationen $F(x,y) = 0$ med $F \in \mathcal{C}^1$ definierar lokalt kring punkten (a,b) där $F(a,b) = 0$, variabeln y som en $\mathcal{C}^1$-funktion av x om $F'_y(a,b) \neq 0$. Med $F(x,y) = x^3 + y^3 + xy - 11$ har vi $F'_y(1,2) = 13 \neq 0$, derivatan blir $y'(x) = -\frac{F'_x(1,2)}{F'_y(1,2)} = -\frac{3x^2+y}{3y^2+x}$ och $y'(1) = -\mathbf{\frac{5}{13}}$.

(d)

$$\int_0^1(\int_0^z(\int_0^y f(x,y,z)dx)dy)dz = \int_\mathbf{0}^\mathbf{1}(\int_\mathbf{x}^\mathbf{1}(\int_\mathbf{y}^\mathbf{1} \mathbf{f(x,y,z)dz)dy)dx}$$

Mängden vi integrerar över kan skrivas: $0 \le x \le y \le z \le 1$. Den första integrationen i z sker då över intervallet $y \le z \le 1$. Därefter återstår området $0 \le x \le y \le 1$ i xy-planet, vilket kan skrivas: $x \le y \le 1, 0 \le x \le 1$. Detta ger de två sista stegen. (Rita gärna!)

2. (a) Skärningskurvan mellan ytorna ges av

$$\begin{cases} z &= 8 - x^2 + y^2 \\ z &= x^2 + 3y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ z &= 4 + 2y^2 \end{cases}$$

Projektionen av området V på xy-planet är alltså cirkelskivan $D = (x,y) : x^2 + y^2 \le 4$. Volymen blir då

$$\iint_D ((8 - x^2 + y^2) - (x^2 + 3y^2))\,dxdy = \iint_D (8 - 2x^2 - 2y^2)\,dxdy = \text{ (polära koordinater)}$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8 - 2r^2)r\,drd\theta = \mathbf{16}\pi$$

(b) Detta är ett fall för Gauss sats. Med normalriktning ut från V är flödet detsamma som trippelintegralen

$$\iiint_V div\boldsymbol{F}\,dxdydz = \iiint_V (y + 1 - 2y + y)\,dxdydz = \iiint_V 1\,dxdydz = \text{vol}(V) = \mathbf{16}\pi$$

(c) Här är det Stokes sats som hjälper:

$$\int_\gamma (ze^{xz}, x, xe^{xz})\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \nabla\times(ze^{xz}, x, xe^{xz})\cdot\boldsymbol{N}dS$$

där Y är en av de två ytorna som har γ som rand, vi kan välja $z = x^2 + 3y^2$. Normalen ska vara uppåt (i z-led) för att Stokes ska vara nöjd. Eftersom $\nabla\times(ze^{xz}, x, xe^{xz}) = (0,0,1)$ och ytan Y kan framställas som $\boldsymbol{r} = (x, y, x^2 + 3y^2)$ med $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-2x, -6y, 1)$, får vi till slut

$$\int_\gamma (ze^{xz}, x, xe^{xz})\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D (0,0,1)\cdot(-2x,-6y,1)\,dxdy = \iint_D 1\,dxdy = \text{area}(D) = \mathbf{4}\pi$$

3. (a) Fältet är $\nabla xe^{y^2} = (\mathbf{e^{y^2}}, \mathbf{2xye^{y^2}})$.

(b) Vårt fält är $\boldsymbol{F} = (e^{y^2}, 2xye^{y^2}) + (-y, x)$. Vi kan därför utnyttja potentialen enligt (a) och integralens additivitet:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C e^{y^2}\,dx + 2xye^{y^2}\,dy + \int_C -y\,dx + x\,dy$$

Den första integralen är potentialdifferensen mellan punkterna $(-1,0)$ och $(1,0)$, den andra beräknas genom parametrisering av halvcirkelbågen: $(x,y) = (\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le \pi$. Det ger:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \left[xe^{y^2}\right]_{(1,0)}^{(-1,0)} + \int_0^\pi (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)\,dt = -\mathbf{2} + \pi$$

4. Integranden är positiv. I polära koordinater beskrivs området av olikheterna $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $r^2 \cos\theta \sin\theta > 1$. Byter vi till polära koordinater får vi därmed

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \iint_{D'} \frac{r}{r^4}\, drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\infty} \frac{1}{r^3}\, drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\, d\theta = \left[\frac{\sin^2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Anm: Vill man vara utförlig med uttömmande mängder, kan man begränsa variablerna enligt $\frac{1}{n} \le \theta \le \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ och $r \le r_n$ där r_n är värdet på r där kurvan $xy = 1$ skär $\theta = \frac{1}{n}$. När man låter $n \to \infty$ får man precis som i de avslutande leden ovan. En under kursen refererad sats om variabelbyte för konvergenta integraler med positiv integrand tillåter oss att göra som ovan, fast den står inte i kursboken.

5. Bilda en kompakt delmängd Y av ytan (ytorna) genom att snitta den med sfären $x^2+y^2+z^2 = 9$. T. ex. ligger punkten $(2,1,1)$ på ytan $xy^2z^3 = 2$ och innanför sfären ($\sqrt{6} < 3$). Vi väljer att minimera avståndets kvadrat $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ på Y. Då f är kontinuerlig och Y är kompakt, har vi en sats som garanterar existensen av största värde (=9) och minsta värde av f på Y. Mängden Y karakteriseras av bivillkoret $g(x,y,z) = xy^2z^3 - 2 = 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 9$. Då minimum antas i en inre punkt till $D_f \cap D_g$, så måste i varje minimipunkt gradienterna till f och g vara parallella, dvs $\nabla f = \lambda \nabla g,\ g = 0$ eller $\nabla g = 0,\ g = 0$. Det senare kan inte vara uppfyllt, då $\nabla g = 0$ kräver att någon koordinat är noll, så $g = -2$. Vi löser det första systemet:

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2x & = & \lambda y^2z^3 \\ 2y & = & \lambda 2xyz^3 \\ 2z & = & \lambda 3xy^2z^2 \\ xy^2z^3 & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} 12x^2 & = & \lambda 6xy^2z^3 \\ 6y^2 & = & \lambda 6xy^2z^3 \\ 4z^2 & = & \lambda 6xy^2z^3 \\ xy^2z^3 & = & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} y^2 & = & 2x^2 \\ z^2 & = & 3x^2 \\ xy^2z^3 & = & 2 \end{array}\right.$$

och vi får till slut $x^2 = 3^{-\frac{1}{2}},\ y^2 = 2\cdot 3^{-\frac{1}{2}},\ z^2 = 3\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$. Med dessa värden (som svarar mot 4 olika punkter på Y, inte 8 eftersom x och z måste ha samma tecken) får vi $f = 6\cdot 3^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$, vilket (som enda kandidat) måste vara minsta värdet av f på Y. Minsta avståndet är då $\sqrt{\mathbf{2\sqrt{3}}} \approx \mathbf{1,86}$.

6. Vår ellips har ekvationen $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ i standardiserad form, halvaxlarna är tydligen $\sqrt{6}$ och $\sqrt{5}$. Med den linjära avbildningen $L : (x,v) = (\sqrt{6}u, \sqrt{5}v)$ avbildas enhetscirkeln $u^2 + v^2 = 1$ omvändbart på vår ellips. Trianglar i xy-planet och trianglar i uv-planet avbildas i varandra av L och dess invers. Jacobianen för L är $\sqrt{30}$. Genom variabelbyte ser vi att om området D' i uv-planet avbildas på området D i xy-planet, så är

$$\text{Area}(D) = \iint_D 1\, dxdy = \iint_{D'} \sqrt{30}\, dudv = \sqrt{30}\,\text{Area}(D')$$

Av detta förstår vi att den största triangeln på enhetscirkeln motsvaras av den största triangeln på ellipsen. Den liksidiga triangeln inskriven i enhetscirkeln kan med radier delas upp i tre kongruenta likbenta trianglar med två sidor =1 och mellanliggande vinkel $\frac{2\pi}{3}$, därmed har den arean $3\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Motsvarande triangel på ellipsen har arean $\sqrt{30}\frac{3\sqrt{3}}{4} = \mathbf{\frac{9\sqrt{10}}{4}}$, vilket alltså är den maximala arean av en triangel inskriven i ellipsen.

7. Se läroboken!

8. Se läroboken!