Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2015 03 16 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Lennart Falk, 772 3564

För godkänt krävs minst 20 poäng.

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2015 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1415

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Bestäm en ekvation för det plan som tangerar ytan $xy^2 - xy - z^2 = -2$ i punkten $(1, -1, -2)$. (2p)

   (b) Funktionen $f(x, y) = 2xy + x^2 - y^2$ har en stationär punkt. Vilken sort? (2p)

   (c) Transformera den partiella differentialekvationen $\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = y$ genom variabelbytet $u = -x^2 + y,\ v = x$. (Lös ej!) (2p)

   (d) Bestäm en funktion $Q(x, y)$ så att värdet av kurvintegralen $\int_C (6xy^3 + 6x^2y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ endast beror på var kurvan C startar och slutar. (2p)

2. Beräkna kurvintegralen $\int_C (2y + x^2e^{\sin x})dx + (4x - y^3)dy$, där C är högra halvan av cirkeln $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ genomlöpt från $(-3, 0)$ till $(-3, 4)$. (6p)

3. (a) Låt K vara den kropp som begränsas av ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$. Beräkna volymen av K. (4p)

   (b) Om $\boldsymbol{u} = (xy, y - y^2 + z, x + yz)$ är hastighetsfältet för en strömning, beräkna flödet av $\boldsymbol{u}$ ut från K. (2p)

   (c) Om en partikel rör sig längs skärningskurvan mellan ytorna som begränsar K (enligt (a)) så att kurvans projektion på xy-planet genomlöps moturs, och om den påverkas av kraftfältet (ze^{xz}, x, xe^{xz}), vilket arbete uträttas då på partikeln? (4p)

   (d) Beräkna koordinaterna för masscentrum av K om vi antar att densiteten är konstant. (Masscentrum ligger på z-axeln, så det räcker att beräkna dess z-koordinat.) (4p)

4. Den totala produktionen av en vara beror på kostnaderna av investeringar K (till exempel maskiner) och av arbetskraft L . Vi antar nu att produktionen följer *Cobb-Douglas modell*:
$$P = CK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ \text{där } C > 0 \text{ och } \alpha \in (0, 1) \text{ är konstanter.}$$
   Antag också att man har ett totalbelopp A att dela upp mellan kostnaderna K och L. Bestäm K och L så att produktionen maximeras under detta villkor. Metoden för att söka max/min under bivillkor ska användas. (4p)

5. Beräkna
$$F(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,dt, \quad x > 0,\ y > 0.$$
   Tips: man kan använda sig av ”derivering under integraltecknet” eller av en generaliserad dubbelintegral. (6p)

6. Låt $\boldsymbol{F}$ vara ett vektorfält definierat i en mängd $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Antag att kurvintegralen av $\boldsymbol{F}$ är oberoende av vägen i Ω, och visa under lämpliga förutsättningar på $\boldsymbol{F}$ och Ω att fältet har en potential i Ω. (6p)

7. (a) Den implicita funktionssatsen handlar (ofullständigt uttryckt) om att i en ekvation av typen $F(x, y) = C$ kunna uppfatta variabeln y som en deriverbar funktion $y = f(x)$. Formulera satsen i sin helhet (utan bevis). (2p)

   (b) Man kan ändra villkoren på $F(x, y)$ i implicita funktionssatsen så att man kan garantera derivator upp till ordning $k(= 2, 3, \ldots)$ av $f(x)$. Hur ska detta göras? Använd den tidigare versionen av satsen för att motivera giltigheten av den nya. (4p)