Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2015-03-16

1. (a) En normalvektor till ytan $f(x,y,z) = -2$ i punkten $P = (1,-1,-2)$ är gradienten till f i punkten P, dvs $\nabla f(P) = (y^2 - y, 2xy - x, -2z)|_P = (2,-3,4)$. Tangentplanet har då en ekvation av typen $2x - 3y + 4z = D$, där insättning av P ger oss $D = -3$. Tangentplanet ges av ekvationen

$$\mathbf{2x - 3y + 4z = -3}.$$

(b) $\nabla f = (2y + 2x, 2x - 2y) = (0,0)$ har en enda lösning $(x,y) = (0,0)$. I denna enda stationära punkt är den kvadratiska formen

$$Q(h,k) = \frac{1}{2}(f''_{xx}(0,0)h^2 + 2f''_{xy}(0,0)hk + f''_{yy}(0,0)k^2) = h^2 + 2hk - k^2 = (h+k)^2 - 2k^2$$

Vi ser att denna kvadratiska form är *indefinit*, så vi har en sadelpunkt.

Origo är en sadelpunkt.

(c) Med kedjeregeln får vi, med $\tilde{f}(u,v) = f(x,y)$ (det är OK att behålla funktionsnamnet f):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + 2x\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + 2x(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(-2x) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} + 2x(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\cdot 0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}$$

Eftersom $y = u + x^2 = u + v^2$ får vi den nya ekvationen: $\mathbf{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v} = u + v^2}$.

(d) Om $P(x,y) = 6xy^3 + 6x^2y$ så ska $P'_y = Q'_x$ vara uppfylld (då är integralen oberoende av vägen). Detta ger $18xy^2 + 6x^2 = Q'_x \quad \Rightarrow \quad Q = 9x^2y^2 + 2x^3 + g(y)$, där vi kan välja (t. ex.) $g(y) = 0$. Alltså kan vi ta

$$\mathbf{Q(x,y) = 9x^2y^2 + 2x^3}.$$

(Man kan också utgå ifrån att det ska finnas en potential.)

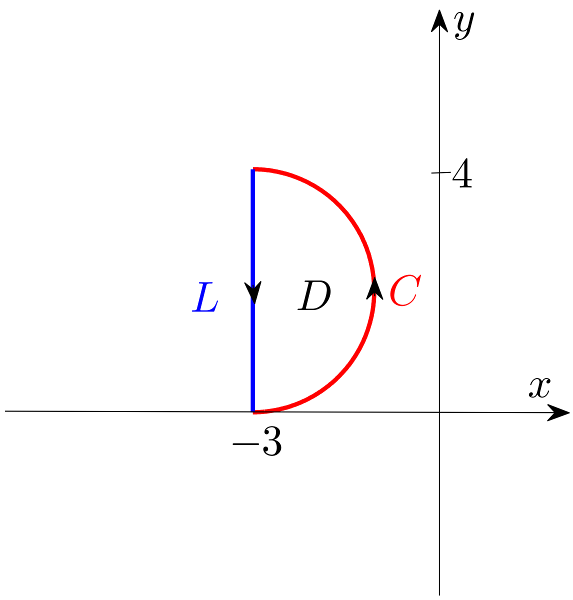
2. Om vi sluter kurvan genom att lägga till sträckan L mellan $(-3,0)$ och $(-3,4)$, så har kan vi använda Greens formel (fältet är $\mathcal{C}^1$ överallt, randen är $\mathcal{C}^1$, omloppsriktningen är positiv) för denna nya kurva. Vi måste då också beräkna kurvintegralen över L och subtrahera den. Med D lika med den högra halvcirkeln och ∂D orienterad positivt, samt $(P,Q) = (2y + x^2e^{\sin x}, 4x - y^3)$ har vi då

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_L P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy$$

och därmed

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy - \int_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D 2\,dxdy - \int_4^0 (-12 - y^3)\,dy =$$

$$= 2\mu(D) - \int_0^4 (12 + y^3)\,dy = \mathbf{4\pi - 112}$$



3. (a) Vi studerar först skärningskurvan mellan ytorna, en sadelyta och en elliptisk paraboloid.

$$\begin{cases} z &= 8 - x^2 + y^2 \\ z &= x^2 + 3y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 &= 4 \\ z &= 4 + 2y^2 \end{cases}$$

K begränsas därför av de två ytorna och en cylinder:

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + 3y^2 \leq z \leq 8 - x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Volymen av K kan då uppfattas som dubbelintegralen över $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ av ytornas differens:

$$\mu(K) = \iint_D \left((8 - x^2 + y^2) - (x^2 + 3y^2)\right) dxdy = \iint_D 2(4 - x^2 - y^2)\, dxdy$$

Vi ser att differensen är positiv inne i cylindern, så vi har tagit differensen rätt. Med polära koordinater ($J = r$) har vi

$$\mu(K) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 2(4 - r^2) r\, dr = 4\pi \int_0^2 (4r - r^3)\, dr = \mathbf{16}\pi$$

(b) Här är det läge för Gauss sats, fältet $\boldsymbol{u}$ är $\mathcal{C}^1$, randytan ∂K är $\mathcal{C}^1$ och ges utåtriktad normal. Då ges flödet av $\boldsymbol{u}$ ut från K av en normalytintegral som enligt Gauss sats är

$$\iint_{\partial K} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iiint_K \nabla \cdot \boldsymbol{u}\, dxdydz = \iiint_K 1\, dxdydz = \mu(K) = \mathbf{16}\pi$$

(c) Vi har sett att skärningskurvan är randkurva till $\mathcal{C}^1$-ytan

$$Y = \{(x, y, z) : z = x^2 + 3y^2\}, \text{ där } (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$$

(den andra ytan går lika bra). Om vi låter ytans normalvektor peka uppåt, så är orienteringen av yta och randkurva så som begärs i Stokes sats. Fältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (ze^{xz}, x, xe^{xz})$ är ju också $\mathcal{C}^1$ överallt.
Vi har $\nabla \times \boldsymbol{F} = (0, 0, 1)$, och med $\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, x^2 + 3y^2)$ är $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-2x, -6y, 1)$. Stokes sats:

$$\int_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\, dS = \iint_D (0, 0, 1) \cdot (-2x, -6y, 1)\, dxdy = \iint_D 1\, dxdy = \mu(D) = \mathbf{4}\pi$$

(d) Vi behöver beräkna trippelintegralen $\iiint_K z\, dxdydz$, eftersom z-koordinaten för masscentrum för K är denna integral dividerad med volymen av K.

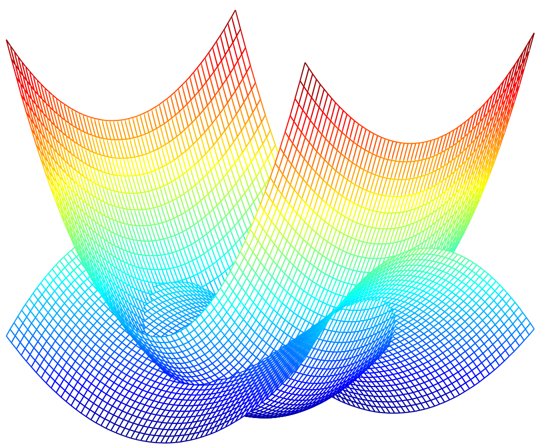
$$\iiint_K z\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2+y^2} z\, dz = \iint_D \frac{1}{2}\left((8 - x^2 + y^2)^2 - (x^2 + 3y^2)^2\right) dxdy =$$

$$= \iint_D \frac{1}{2}(8 - 2x^2 - 2y^2)(8 + 4y^2)\, dxdy = \left(\text{ polära koordinater, } J = r\ \right)$$

$$= \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(8 - 2r^2)(8 + 4r^2 \sin^2\theta) r\, d\theta = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(8 - 2r^2)(8 + 2r^2(1 - \cos 2\theta)) r\, d\theta =$$

$$\left(\cos 2x \text{ integreras till noll }\right) = 4\pi \int_0^2 (4 - r^2)(4 + r^2) r dr = 4\pi \int_0^2 (16r - r^5)\, dr = \frac{16\pi \cdot 16}{3}$$

Vi dividerar med volymen av K som enligt (a) är 16π och får $z_T = \frac{16}{3}$ och masscentrum $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}})$.



4. Vi har ett bivillkor: $K + L = A,\ K \geq 0,\ L \geq 0$, vilket definierar en kompakt mängd. Vår målfunktion $P(K, L) = CK^{\alpha} L^{1-\alpha}$ är kontinuerlig. En sats garanterar då att både största och minsta värdet av P under detta bivillkor existerar. Eftersom $P(K, L) \geq 0$ och $P(0, L) = P(K, 0) = 0$, så måste minimum vara noll. Vårt maximum är alltså en inre punkt på sträckan $K + L = A,\ K \geq 0,\ L \geq 0$. Enligt satsen om bivillkorsoptimering är denna punkt en lösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} \nabla P \text{ och } \nabla g \text{ är linjärt beroende} \\ g = K + L - A = 0 \end{cases}$$

Eftersom $\nabla g = (1, 1)$ och $\nabla P = (C\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha}, CK^{\alpha}(1-\alpha)L^{-\alpha}) = CK^{\alpha-1}L^{-\alpha}(\alpha L, (1-\alpha)K)$, så får systemet utseendet

$$\begin{cases} \alpha L &= (1-\alpha)K \\ K + L &= A \end{cases}$$

med lösningen $\mathbf{K} = \alpha\mathbf{A},\ \mathbf{L} = (\mathbf{1} - \alpha)\mathbf{A}$, vilket är vår maximipunkt.

5. **(I) Lösning med "derivering under integraltecknet"**
Om vi först antar att deriveringsoperatorn får flyttas in under integraltecknet, får vi:

$$F'_x(x, y) = \int_0^{\infty} -e^{-xt}\, dt = \left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t=\infty} = -\frac{1}{x}$$

$$F'_y(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-yt}\, dt = \left[-\frac{e^{-yt}}{y}\right]_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{y}$$

Av detta får vi att $F(x, y) = \ln y - \ln x + C$. Genom att sätta in $x = y$ i vår integral, ser vi att

$$0 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-xt}}{t}\, dt = \ln x - \ln x + C,$$

dvs $C = 0$. Vi har fått $F(x, y) = \ln \frac{y}{x}$.

Vi ska nu rättfärdiggöra våra deriveringar innanför integraltecknet. Enligt sats 3 i kapitel 5 ska vi kolla om

1) Vår integral är konvergent för alla $x > 0$ respektive $y > 0$.
Nära $t = 0$ är integranden approximativt lika med $y - x$ (Taylorutveckla: $e^{-xt} = 1 - xt + \ldots$), så där har vi inget problem. För $1 \leq t < \infty$ är integrandens termer begränsade av e^{-xt} respektive e^{-yt}, så genom jämförelsekriteriet är både $\int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\, dt$ och $\int_1^{\infty} \frac{e^{-yt}}{t}\, dt$ konvergenta var för sig (och hela integralen är absolutkonvergent).

2) Integranden $f(t, x, y)$ och dess partiella x- och y-derivator är kontinuerliga för $x > 0,\ y > 0$ och $0 \leq t < \infty$.
Detta är tydligt med x och y, bara fallet $t = 0$ kan vålla problem, men där har vi ju vår Taylorapproximation som verifierar kontinuiteten.

3) Vi ska vi hitta en majorant $g(t)$ med konvergent integral för $|f'_x| = e^{-xt}$ på varje x-intervall av typen $[a, b]$ med $0 < a < b < \infty$. Då tar vi $g(t) = e^{-at}$, som ju har en konvergent integral. Precis likadant för y-derivatan.

Dessa kontroller gör att vi vågar påstå att $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \ln \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$.

(II) Lösning med generaliserad dubbelintegral

Vi kan uppfatta integranden som resultatet av en integration, och därmed blir vår integral en upprepad enkelintegral. Den kan skrivas om som en dubbelintegral och sedan med framgång integreras i omvänd ordning:

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\, dt = \int_0^{\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{t}\right]_{s=x}^{s=y} dt = \int_0^{\infty} dt \int_x^y e^{-st}\, ds = \int_x^y ds \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt =$$

$$= \int_x^y \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_{t=0}^{t=\infty} ds = \int_x^y \frac{1}{s}\, ds = \ln \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}$$

Vi fick kasta om integrationsordningen eftersom de upprepade integralerna är absolutkonvergenta.

6. Se läroboken kapitel 9!

7. (a) se läroboken kapitel 4!

   (b) Vi kräver att $F(x, y)$ ska vara $\mathcal{C}^k$ och att $F'_y(a, b) \neq 0$, där $F(a, b) = C$. Då ska det finnas en omgivning till (a, b) där ekvationen $F(x, y) = C$ definierar y som en $\mathcal{C}^k$-funktion f av x. För beräkning av högre derivator deriverar man ekvationen $F(x, f(x)) = C$ upprepade gånger.

   Motivering/bevis: Att funktionen $f \in \mathcal{C}^1$ existerar lokalt säkerställs av implicita funkltionssatsen i sin vanliga form. Vid derivering får man

$$F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))f'(x) = 0$$

   Om vi byter ut $f'(x)$ mot variabeln y, så har vi en ekvation

$$G(x, y) = F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))y = 0$$

   Om $F \in \mathcal{C}^k$ (med $k \geq 2$), så kan vi tillämpa implicita funktionssatsen på ekvationen $G(x, y) = 0$, där $G \in \mathcal{C}^1$ och $G'_y(a, f'(a)) = F'_y(a, f(a)) \neq 0$. Den lösning y som funktion av x som nu utlovas, måste ju vara identisk med $f'(x)$, så den blir $\mathcal{C}^1$ och

$$G'_x(x, f'(x)) + G'_y(x, f'(x))f''(x) = 0$$

   så vi har fått fram en andraderivata av f. Detta kan upprepas rekursivt för varje derivata upp till ordning k.

   Variant: Om man löser ut f' ur den första deriverade ekvationen, så får man ju

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$$

   Om F har andraderivator och $F'_y(a, f(a)) \neq 0$, så förstår man att kvotregeln producerar en andraderivata $f''(x)$ som är OK (alla ingående derivator finns och nämnaren $(F'_y(a, f(a)))^2$ är skild från noll). Då har man fixat fallet $k = 2$. Om villkoret på F tillåter att vi deriverar fler gånger, får vi ett allt risigare uttryck, men även nu kan vi förstå att nämnaren är nollskild (den utgörs av allt högre potenser av $F'_y(a, f(a))$).