Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2015-04-14

1. (a) Riktningsderivatan är störst i gradientens riktning och där är den $|\nabla f(1,2)| = |(\frac{12}{5}, \frac{9}{5})| = \mathbf{3}$

   (b) $\nabla f = (0,0) \iff (2x, 3y^2 - 3) = (0,0)$. Detta ger de stationära punkterna $(0, \pm 1)$. Den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen blir $\frac{1}{2}(f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2)$, vilket i $(0,1)$ är $h^2 + 3k^2$ och i $(0,-1)$ är det $h^2 - 3k^2$. Den förra är positivt definit, den senare är indefinit ($Q(1,0) > 0,\ Q(0,1) < 0$). Så $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ är en **lokal minimipunkt,** medan $(\mathbf{0}, -\mathbf{1})$ är en **sadelpunkt**.

   (c) Att det $\boldsymbol{f}'(1,2) = -2 \neq 0$ betyder enligt inversa funktionssatsen att $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar kring $(1,2)$. Då är

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(2,-1) = \boldsymbol{f}'(1,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   (d) Om vi tar (x,y) som parametrar, får vi $\boldsymbol{r} = (x, y, 1 - x^4 - y^4)$. Då är parametermängden $\mathbf{D} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x^4} + \mathbf{y^4} \leq \mathbf{1}\}$ och integranden är $f(x,y) = |\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y| = |(-f'_x, -f'_y, 1))| = \sqrt{\mathbf{16x^6} + \mathbf{16y^6} + \mathbf{1}}$

2. Eftersom $f(x,0) = 0$ och $f(0,y) = 0$, så **existerar de partiella derivatorna i origo och de är båda 0**. Villkoret för differentierbarhet i origo är att

$$f(h,k) - f(0,0) - f'_x(0,0)h - f'_y(0,0)k = \sqrt{h^2 + k^2}\rho(h,k)$$

   där $\rho(0,0) \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. Vi får

$$\rho(h,k) = \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

   vilket saknar gränsvärde då $(h,k) \to (0,0)$, eftersom $\rho(h,0) = 0$ medan $\rho(h,h) = \frac{1}{2}$ (olika gränsvärden längs olika linjer genom origo). f är därmed **inte differentierbar**, och **inte heller $\mathcal{C}^1$**, eftersom den då enligt en sats skulle ha varit differentierbar.

3. Kedjeregeln ger, med $F(u,v) = f(x,y)$:

$$xF'_x + yf'_y = x(F'_u \frac{1}{y} + F'_v \cdot 0) + y(F'_u \frac{-x}{y^2} + F'_v \cdot 1) = yF'_v$$

   vilket gör att vår PDE kan skrivas och lösas så här:

$$F'_v(u,v) = u + 1 \iff F(u,v) = uv + v + g(u) \iff f(x,y) = x + y + g(\frac{x}{y})$$

   där g är en godtycklig $\mathcal{C}^1$-funktion. Villkoret $f(x,1) = x^2 + x + 1$ ger oss $g(x) = x^2$, så vår lösning är

$$\mathbf{f(x,y) = x + y + \frac{x^2}{y^2}}.$$

4. Om vi lägger till x-axeln från $(1,0)$ till $(-1,0)$, så har vi en sluten kurva, som är den negativt orienterade randen ∂D till en halv ellipsskiva D. Villkoren för Greens formel är uppfyllda med förstagradspolynom (men observera fel orientering!). Om den tillagda orienterade sträckan kallas L, så har vi

$$\int_\gamma Qdx+Qdy+\int_L Qdx+Qdy=\int_{\partial D} Pdx+Qdy=-\iint_D (Q'_x-P'_y)\,dxdy=-\iint_D 2\,dxdy=-2\frac{\pi ab}{2}=-2\pi$$

där $a=1$ och $b=2$ är ellipsens halvaxlar enligt formel $A=\pi ab$ för ellipsskivans area (räkna annars ut dubbelintegralen). Eftersom

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_1^{-1} P(x,0)\,dx=\int_1^{-1}(2x+1)\,dx=\int_1^{-1} 1\,dx=-2$$

så är vår integral $\mathbf{-2\pi+2}$.
Det är inte heller särskilt svårt att beräkna den direkt genom parametrisering av γ med elliptiskt polära koordinater.

5. Här kan vi använda Gauss sats (fältet är helt harmlöst), om vi lägger på ”locket” $Y_1=\{(x,y,1):x^2+y^2\le 1\}$. Då innesluts $K=\{(x,y,z):x^2+y^2\le z\le 1,\ x^2+y^2\le 1\}$ av ytan $Y\cup Y_1$. Eftersom Gauss sats förutsätter utåtriktad normal, får vi här byta tecken på trippelintegralen, så vi har (med *normal nedåt* i Y_1)

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS+\iint_{Y_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=\iint_{Y\cup Y_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=-\iiint_K \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dxdydz=-\iiint_K (z+1)\,dxdydz$$

och därmed, med $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$:

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=-\iiint_K (z+1)\,dxdydz-\iint_{Y\cup Y_1}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=-\int_0^1 (z+1)\,dz\iint_{x^2+y^2\le z} 1\,dxdy-(-\iint_D (1-2y)\,dxdy)=$$

$$=-\int_0^1 (z+1)\pi z\,dz+\iint_D 1\,dxdy=-\pi\int_0^1 (z^2+z)\,dz+\pi=-\frac{5\pi}{6}+\pi=\frac{\pi}{\mathbf{6}}$$

Alternativ lösning: Även i denna uppgift kan man beräkna integralen direkt via parametrisering: Y kan parametriseras enligt $\boldsymbol{r}=(x,y,x^2+y^2)$, med $\boldsymbol{r}'_x\times\boldsymbol{r}'_y=(-2x,-2y,1)$. Denna parametrisering ger den föreskrivna orienteringen, så vi får:

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=\iint_D (e^y+x(x^2+y^2),y^2-x),(1-2y)(x^2+y^2))\cdot(-2x,-2y,1)\,dxdy=$$

$$=\iint_D (-2xe^y-2x^4-2x^2y^2-2y^3+2xy+x^2+y^2-2x^2y-2y^3)\,dxdy$$

Vi kastar bort de termer som av symmetriskäl integreras till noll:

$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS=\iint_D (-2x^4-2x^2y^2+x^2+y^2)\,dxdy=\iint_D (-2x^2(x^2+y^2)+x^2+y^2)\,dxdy=$$

$$=\iint_D (-(x^2+y^2)^2+x^2+y^2)\,dxdy=\quad\text{(polära koordinater)}\quad=2\pi\int_0^1 (-r^5+r^3)\,dxdy=\frac{\pi}{\mathbf{6}}$$

I den tredje likheten har utnyttjats att integralen av $2x^2(x^2+y^2)$ är densamma som integralen av $2y^2(x^2+y^2)$, så båda kan ersättas av $(x^2+y^2)(x^2+y^2)$.

6. Vi kan börja med att se punkten $P = (x_1, y_1)$ som lösning på problemet att minimera avståndet, eller lika gärna kvadraten av avståndet $f(x,y) = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$, från punkten $Q = (x_2, y_2)$ till kurvan γ_1. Eftersom f och u är C^1-funktioner och eftersom P är en inre punkt till definitionsmängderna för f och u, så vet vi av satsen för max/min under bivillkor att ∇f och ∇u är linjärt beroende i P. Då $\nabla u \neq \mathbf{0}$, måste därför $\nabla f = \lambda \nabla u$ för något $\lambda \neq 0$ ($P \neq Q$), dvs $2\vec{QP} = 2(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \lambda \nabla u$. Då ∇u är normalvektor till nivåkurvan $u(x,y) = 0$ (alltså γ_1), så är även linjen PQ vinkelrät mot γ_1.
Resonemanget gäller förstås också om vi byter till kurvan γ_2 och dess minimala avstånd till P. Så linjen PQ skär båda kurvorna vinkelrätt.

   Alternativt hade man kunnat sätta upp båda kurvorna som bivillkor, och då arbeta med fyra variabler (punkternas koordinater). Målfunktionen f tas som avståndet i kvadrat, och dess gradient blir en linjärkombination av ∇u och ∇v (om man tolkar u och v som funktioner av alla fyra variablerna):

$$\nabla f = (2(x_1 - x_2), 2(y_1 - y_2), -2(x_1 - x_2), -2(y_1 - y_2)) = \lambda_1(u'_{x_1}, u'_{y_1}, 0, 0) + \lambda_2(0, 0, v'_{x_2}, v'_{y_2})$$

   med samma slutsats.

7. Se läroboken kapitel 6!

8. Se läroboken kapitel 9!