Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2015 08 25 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: Lennart Falk, 7723564
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2015 ingår.
Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1415
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.
Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Vilken typ av stationär punkt har polynomet $x^2 + x^3 + 3y^2 - 2y^4 - 4xy + 5$ i origo? (2p)

   (b) Skriv den upprepade integralen $\int_0^1 dy \int_1^{e^y} f(x, y)\, dx$ i omvänd integrationsordning. (2p)

   (c) Skriv en integral som uttrycker arean av ytan $(x, y, z) = (u + v^2, u^2 + v, uv)$, $1 \le u \le 2,\ 1 \le v \le 3$. Beräkna den inte! (2p)

   (d) Den vektorvärda funktionen $\boldsymbol{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x^2 + 3y \end{pmatrix}$ approximeras lokalt kring $(x, y) = (1, 2)$ enligt $\boldsymbol{f}(1 + h, 2 + k) \approx \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.
   Bestäm konstanterna a, b, c, d, e, f. (2p)

2. (a) Beräkna rotationen av fältet $\boldsymbol{F} = (\sin(y - z), y + x\cos(y - z), -x\cos(y - z))$. (2p)

   (b) Beräkna $\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$, då C är räta linjen från $(\pi, \pi/2, \pi/2)$ till $(2\pi, \pi/2, 0)$. (4p)

3. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_D \frac{1}{z\sqrt{y^2 + xy - 2x^2}}\, dxdydz$$
där $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le z \le 2(x^2 + y^2),\ 0 \le y - x \le 1,\ 0 \le y + 2x \le 1\}$. (6p)

4. Bestäm de punkter på kurvan $x^4 + x^2y^2 + 2y^4 = 14$ som har störst respektive minst avstånd till origo. Motivera först existensen av sådana punkter. (6p)

5. Beräkna flödet av fältet $\dfrac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ genom ellipsoidytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ i riktning utåt, sett från origo. (6p)

6. Lös den partiella differentialekvationen
$$3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (x > 0,\ y > 0)$$
genom att göra variabelbytet $s = xy,\ t = x^2y^3$. (6p)

7. Använd definitionen av riktningsderivata för att bevisa den formel man använder för att beräkna riktningsderivatan av en differentierbar funktion med hjälp av gradienten. (4p)

8. (a) Formulera Greens formel och bevisa den under lämpliga förutsättningar (som i läroboken eller för en axelparallell rektangel). (6p)

   (b) Formulera Stokes sats. (2p)