Kortfattade lösningar till tentan MVE035 2015-08-25

1. (a) Den kvadratisk formen i Taylorutveckligen i origo är $h^2 - 4hk + 3k^2 = (h-2k)^2 - k^2$, som är indefinit. Då är origo en **sadelpunkt**.

   (b) $\int_0^1 dy \int_1^{e^y} f(x,y)\,dx = \mathbf{\int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy}$.

   (c) Arean är $\iint_D |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| = \iint_{[\mathbf{1},\mathbf{2}]\times[\mathbf{1},\mathbf{3}]} \mathbf{\sqrt{(2u^2-v)^2+(2v^2-u)^2+(1-4uv)^2}\,du\,dv}$.

   (d) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(1,2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Rotationen av fältet är $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = (0,0,0)$.

   (b) Därför finns en potential $U(x,y,z) = \frac{y^2}{2} + x\sin(y-z)$. Integralen beror bara på start och mål och är $U(2\pi, \pi/2, 0) - U(\pi, \pi/2, \pi/2) = \mathbf{2}\pi$.

3. Med $E = \{(x,y) : 0 \le y - x \le 1,\ 0 \le y + 2x \le 1\}$ har vi

$$I = \iiint_D \frac{1}{z\sqrt{y^2+xy-2x^2}}\,dxdydz = \iint_E \sqrt{y^2+xy-2x^2}\,dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} \frac{1}{z}\,dz =$$

$$= \ln 2 \iint_E \sqrt{y^2+xy-2x^2}\,dx\,dy$$

Vi gör ett variabelbyte: $u = y - x,\ v = y + 2x$, vilket ger integrationsmängden $E' = \{(u,v) = 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1\}$ och Jacobianen $J = -\frac{1}{3}$. Vi fortsätter i de nya variablerna:

$$I = \ln 2 \iint_{E'} \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{v}}\frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{\ln 2}{3}\Big[2\sqrt{u}\Big]_0^1\Big[2\sqrt{v}\Big]_0^1 = \frac{\mathbf{4\ln 2}}{\mathbf{3}}$$

4. Kurvan utgör en kompakt mängd i planet (man ser att $x^2 \le 14$ och $y^2 \le 7$, därav begränsningen). Den kontinuerliga funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ (avståndet i kvadrat) har då enligt sats både största och minsta värde på kurvan. Med $g(x,y) = x^4 + x^2y^2 + 2y^4 - 14$ kan vi uppfatta vårt problem som att bestämma max och min av f under bivillkoret $g = 0$. Alla punkter på kurvan är inre punkter till de båda funktionernas definitionsmängder. Då säger en sats att deras gradienter ska vara linjärt beroende i extrempunkterna, vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$\frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 4x^3 + 2xy^2 & 2x^2y + 8y^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4xy(3y^2 - x^2) = 0$$

Detta ger fallen $x = 0,\ y = 0,\ x^2 = 3y^3$, vilka vart och ett sätts in i bivillkoret. Vi får då de åtta punkterna $(0, \pm 7^{\frac14}),\ (\pm 14^{\frac14}, 0),\ (\pm\sqrt{3}, \pm 1)$. Dessa ger funktionsvärdena (avståndet i kvadrat) $f = \sqrt{7},\ f = \sqrt{14},\ f = \sqrt{16}$. Så vi har största avståndet $= 2$ i punkterna $(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$ och minsta avståndet $= 7^{\frac14}$ i punkterna $(0, \pm 7^{\frac14})$.

5. Här kan vi inte använda Gauss sats på fältet $\boldsymbol{F}$ innanför ellipsoidytan, eftersom fältet är odefinierat i origo. Däremot kan vi avgränsa området inåt med enhetssfären. Så om vår ellipsoid med normal utåt kallas Y och enhetssfären med normal utåt kallas Z, så är ytan $Y \cup (-Z)$ randen till ett område D där fältet är $\mathcal{C}^1$ och där Gauss sats får användas (normalen för $-Z$ är ju ut från D). Då får vi, eftersom divergensen visar sig bli noll:

$$\iint_{Y\cup(-Z)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} dS = \iiint_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\,dx\,dy\,dz = 0$$

Samtidigt har vi:

$$\iint_{Y\cup(-Z)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} dS = \iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} dS - \iint_Z \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} dS = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} dS = \iint_Z \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N} dS = \iint_Z (x,y,z)\cdot\boldsymbol{N} dS$$

(det sista eftersom nämnaren i fältet är 1 på Z). På den nya snällare integralen kan vi använda Gauss sats med $E =$ enhetsklotet:

$$= \iiint_E \boldsymbol{\nabla}\cdot(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_E 3\,dx\,dy\,dz = 3\mathrm{vol}(E) = \boldsymbol{4\pi}$$

6. Vi översätter till nya derivator med kedjeregeln:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} y + \frac{\partial u}{\partial t} 2xy^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} x + \frac{\partial u}{\partial t} 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} y + \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s} 2xy^3\Big) y + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} y + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 2xy^3\Big) 2xy^3 + \frac{\partial u}{\partial t} 2y^3$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s} 3x^2y^2\Big) y + \frac{\partial u}{\partial s} + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 3x^2y^2\Big) 2xy^3 + \frac{\partial u}{\partial t} 6xy^2$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s} 3x^2y^2\Big) x + \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} x + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} 3x^2y^2\Big) 3x^2y^2 + \frac{\partial u}{\partial t} 6x^2y$$

Om man stuvar in detta i vår PDE (ordningen i blandade derivator är betydelselös för $\mathcal{C}^2$-lösningar) och får (efter att ha dividerat bort x- och y-faktorer, som ju är positiva)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t} = 0$$

vilket ger

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(t), \qquad u = f(s) + g(t)$$

Åter till ursprungliga koordinater:

$$\mathbf{u(x,y) = f(xy) + g(x^2y^3)}$$

med godtyckliga funktioner $f \in \mathcal{C}^2$ och $g \in \mathcal{C}^2$.

7. Se läroboken kapitel 2!

8. Se läroboken kapitel 9 och 10!