1-FORMER OCH VEKTORFÄLT

DENNIS ERIKSSON

Innehåll

1. Differentialer av funktioner 1
2. Lite mer allmänna tangentrum 2
3. Vektorfält, eller 1-former 3

1. Differentialer av funktioner

Låt D vara en öppen mängd i $\mathbb{R}^n$ och f en differentierbar funktion i D. Såsom gåtts igenom under kursens gång, innebär detta att f är väl linjärt approximerbar: För varje vektor $\mathbf{a} \in D$, och vektor $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, så kan man skriva

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\rho(\mathbf{h}),$$

där $\rho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to 0$. Den linjära avbildningen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ som ges av $\mathbf{h} \mapsto \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h}$ betecknas ofta som $df(\mathbf{a})$, dvs.

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) := \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h}.$$

Låt oss betrakta några specialfall: Om f är funktionen $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, kallar vi dess differential dx_i. Den har egenskapen att $dx_i(\mathbf{h}) = h_i$, vilket helt enkelt följer från observationen att $\nabla f(\mathbf{a}) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, där 1:an ligger på den i-te platsen. Detta innebär att vi kan skriva $\mathbf{h} = (dx_1(\mathbf{h}), \ldots, dx_n(\mathbf{h}))$ och således

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet (dx_1(\mathbf{h}), \ldots, dx_n(\mathbf{h})) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) dx_i(\mathbf{h}).$$

Detta förkortas ofta som, eftersom $\mathbf{a}$ och $\mathbf{h}$ ofta är implicita:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

En naturlig fråga nu är: Om $df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ då är en linjärisering av funktionen, vad är det en linjär avbildning emellan, hur tolkar vi vektorrummen $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{R}$ som den avbildar emellan? Heurestiskt borde detta motsvara å ena sidan linjäriseringen av området D i punkten $\mathbf{a}$, och linjäriseringen av området $\mathbb{R}$ i $f(\mathbf{a})$. Det är vad man oftast brukar referera till som *tangentrummen* av D i $\mathbf{a}$ respektive tangentrummet av $\mathbb{R}$ i $f(\mathbf{a})$.

Date: 17 februari 2016.

Definition 1.1. *Om D är öppet område i $\mathbb{R}^n$, definierar vi tangentrummet till D i punkten $\mathbf{a}$, betecknat $T_{\mathbf{a}}(D)$ som $\mathbb{R}^n$.*

Givet en vektor $\mathbf{x}$ i f, tänker vi på $T_{\mathbf{a}}(D)$ som alla vektorer som börjar i $\mathbf{a}$, och slutar i $\mathbf{x}$. Efter translation, kan vi representera den vektorn som $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. På samma sätt representerar vi tangentvektorer $T_{f(\mathbf{a})}(\mathbb{R})$ på formen $z - f(\mathbf{a})$ (börjandes i $f(\mathbf{a})$ och slutandes i z.

Om historien ovan ska fortsätta, borde $df(\mathbf{a})$ alltså motsvara en linjär avbildning $T_{\mathbf{a}}(D) \to T_{f(\mathbf{a})}\mathbb{R}$, och vi borde kunna skriva

$$z - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}). \tag{1}$$

Detta är oftast hur vi har definierat tangentplanet för funktionsytan $z = f(\mathbf{x})$. Notera att vi alltid kan skriva en sådan funktionsyta som en nivåyta $z - f(\mathbf{x}) = 0$. Kom nu ihåg att $\ker df(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h} = 0$ är ekvationen för tangentplanet vid punkten $\mathbf{a}$, till nivåytan $f(\mathbf{x}) = C$, där $C = f(\mathbf{a})$. Vi betecknar nivåytan med nivå C med X_C.

Proposition 1.2. *Antag att $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$. Då är*

$$\ker df(\mathbf{a}) = T_{\mathbf{a}}(X_C).$$

Speciellt har vi att om nivåytan är på formen $F(\mathbf{x}, z) = z - f(\mathbf{x}) = 0$, så är

$$\nabla F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = (-\nabla f(\mathbf{a}), 1).$$

Om vi betraktar kärnan till denna, ser vi att vi får exakt ekvationen (1) för tangentrummet till funktionsytan (tänk på att representera tangentvektorerna i punkten $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ i $\mathbb{R}^{n+1}$ som $(\mathbf{x} - \mathbf{a}, z - f(\mathbf{a}))$.

Här ska man dock göra skillnad på två stycken koncept: I det ena fallet tänker vi på en funktion $f : D \to \mathbb{R}$ som en avbildning mellan D och den geometriska kurvan $\mathbb{R}$, så att vi tänker på $f(\mathbf{a})$ som en position på kurvan. I det andra fallet tänker vi på f som en avbildning mellan D och de reella talen, och tänker på $f(\mathbf{a})$ som värdet på funktionen. Detta är bara en konceptuell skillnad, men i det första fallet väljer man ofta att tänka på $df(\mathbf{a})$ som en avbildning mellan tangentrum som ovan, i det andra fallet väljer man att tänka på $df(\mathbf{a})$ som en avbildning från tangentrummet $T_{\mathbf{a}}(D)$ till $\mathbb{R}$.

2. Lite mer allmänna tangentrum

Vi har ovan diskuterat kort vad en differential av en funktion i flera variabler. Speciellt har vi noterat att det är objekt som äter tangentvektorer och spottar ut tal. Det finns långtgående generaliseringar av detta, där man ersätter öppna delmängder i $\mathbb{R}^n$ med mångfalder (som lokalt ser ut som öppna delmängder i $\mathbb{R}^n$). I en sådan kontext definierar man en tangentvektor X utifrån riktningsderivata-egenskapen: Om v är en tangentvektor, ges riktningsderivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ och tangentriktningen $\mathbf{v}$ som

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v}. \tag{2}$$

Här är f en deriverbar funktion på området X. Då gäller speciellt $D_{\mathbf{v}}(fg) = D_{\mathbf{v}}(f)g + fD_{\mathbf{v}}(g)$. Om det finns två vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ som ger upphov till samma riktningsderivata", så

gäller det att för alla differentierbara funktioner f att $\nabla f(\mathbf{a}) \bullet (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = 0$. Men detta kan bara hända om $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ (inses genom att ta f till funktionen som är projisering på i-te variabeln). Med samma logik kan man få tillbaks $\mathbf{v}$ från funktionen $D_{\mathbf{v}}(f)$ genom att betrakta projiceringen på i-te variabeln. Vi har visat att en tangentvektor i en punkt $\mathbf{a}$ är samma sak som en operation X som tar in en differentierbar funktion, och spottar ut ett tal, och uppfyller $X(fg) = X(f)g + fX(g)$. Detta borde ge en vag känsla för hur man generaliserar begreppet tangentvektor (eller snarare derivering, som det brukar kallas i litteraturen).
Följande definition ger ytterliggare ett sätt att se tangentvektorer på.

Definition 2.1. *Antag nu istället att vi har en kurva i $\mathbb{R}^n$, som vi kan parametrisera via $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Då är $\mathbf{x}'(a) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(a) := (x_1'(a), \ldots, x_n'(a))$ en tangentvektor i $\mathbf{x}(a)$.*
Om $X \subseteq \mathbb{R}^n$, säger vi att $T_{\mathbf{a}}(X)$ är vektorrummet som spänns upp av alla vektorer $\mathbf{x}'(0)$, där $\mathbf{x}(t) : \mathbf{R} \to X \to \mathbb{R}^n$ är differentierbar i origo, och $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$.

Vi kan relatera de två genom att sätta

$$\mathbf{x}(f)(\mathbf{x}(a)) := \nabla f(\mathbf{x}(a)) \bullet \mathbf{x}'(a) = \frac{d(f \circ \mathbf{x})(t)}{dt}(a).$$

Notera att det bara beror på vektorn $(x_1'(a), \ldots, x_n'(a))$ och positionsvektorn $\mathbf{x}(a)$ och inte hur kurvan $\mathbf{x}$ uppför sig i andra punkter.

Example 2.2. *Om D är ett öppet område i $\mathbb{R}^n$, så är tangentrummen i punkten $\mathbf{a}$, $T_{\mathbf{a}}D$ alla riktningsderiveringar $X_{\mathbf{v}}(f) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{v} = df(\mathbf{a})(\mathbf{v})$.*

Example 2.3. *Om X ges av $F(\mathbf{x}) = 0$, kan tangentrummet i $\mathbf{a}$ representeras av alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ ortogonala mot $\nabla F(\mathbf{a})$, om $\nabla F(\mathbf{a}) \neq 0$.*
Det får vi genom att tänka på tangentvektorer som tangenter till kurvor: Eftersom $\nabla F(\mathbf{a}) \neq 0$, kan vi enligt implicita funktionssatsen beskriva X, lokalt runt $\mathbf{a}$, som grafen till en $\mathcal{C}^1$ funktion $g : U \to \mathbb{R}$ där U är en öppen delmängd i $\mathbb{R}^{n-1}$. För en kurva $\mathbf{x}_U(t) : \mathbb{R} \to U$, differentierbar i origo, får vi en kurva $\mathbf{x}(t) := (\mathbf{x}_U(t), g(\mathbf{x}_U)), \mathbb{R} \to X \subseteq \mathbb{R}^n$, och alla kurvor är på den formen. Vi kan alltså anta att vi har en kurva $\mathbf{x}(t) \to X$, differentierbar i origo och betrakta den som en kurva $\mathbf{x}(t) \to \mathbb{R}^n$. Då är klart $F(\mathbf{x}(t)) = 0$, och kedjeregeln ger oss att

$$\nabla F(\mathbf{x}(t)) \bullet \mathbf{x}'(t) = 0.$$

Men då $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ ser vi att $\mathbf{x}'(0)$ är en tangentvektor till området X i punkten $\mathbf{a}$, och alla kommer upp på detta sättet.

3. Vektorfält, eller 1-former

Boken pratar om vektorfält i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, förstått som funktioner $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. För enkelhetens skull, låt oss fokusera på $\mathbb{R}^2$. Tanken är att i varje punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, lägger vi till en vektor $F(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^2$. Det kan t.ex. motsvara flödes eller vindhastighet. Typiska exempel är gradienter ∇f till funktioner $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Bland annat motiverat från fysik/mekanik, givet en orienterad kurva γ, med parametrisering $\mathbf{r}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ definierar man en arbetsintegral

$$\int_\gamma F \bullet d\mathbf{r} := \int_a^b \big(Pdr_1'(t) + Qdr_2'(t)\big)\, dt = \int_a^b (P,Q) \bullet \mathbf{r}'(t) dt. \tag{3}$$

Det beror endast på γ med sin orientering, och inte på valet av (orienterings)-bevarande parametrisering $\mathbf{r}$.
Notera nu att enligt definition 2.1 så är $\mathbf{r}'(t)$ en tangentvektor till kurvan γ i punkten $\mathbf{r}(t)$. Med andra ord så är vektorfältet F något som tar in tangentvektorer och ger ut tal. Vi har sett detta när vi introducerade differentialer av funktioner, sett som funktioner från tangentrum i punkter till $\mathbb{R}$. Detta leder oss till begreppet 1-form, som är en typ av generalisering av konceptet differential av funktion.

Definition 3.1. *En 1-form på ett område X är nu ett uttryck som tar in tangentvektorer och ger tillbaks tal. Mer specifikt är det en uppsättning linjära avbildningar $T_{\mathbf{a}}X \to \mathbb{R}$, för varje $\mathbf{a} \in X$.*

Om vi nu har en differential df till en funktion $\mathbb{R}^n \supseteq D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, så verkar detta på tangentvektorer som ovan genom att $df(\mathbf{a})(X) = X(f) \in \mathbb{R}$, eller mer konkret via $df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{a}) \bullet \mathbf{h}$.
I alla fall, så kan en bas för rummet av alla linjär avbildningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ges helt enkelt av $dx_i(\mathbf{a}) = dx_i$ som vi beskrev i tidigare stycket. Det betyder rent konkret att varje linjär avbildning $A : T_{\mathbf{a}}(D) \simeq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kan skrivas på formen

$$A(\mathbf{h}) = F_1(\mathbf{a})h_1 + \ldots + F_n(\mathbf{a})h_n = F_1(\mathbf{a})dx_1(\mathbf{h}) + \ldots + F_n(\mathbf{a})dx_n(\mathbf{h}).$$

Genom att variera punkten $\mathbf{a} \in D$, får vi funktioner $\mathbf{a} \mapsto F_i(\mathbf{a})D \to \mathbb{R}$.

Definition 3.2. *En $\mathcal{C}^1$ 1-form på $D \subseteq \mathbb{R}^n$ är ett uttryck på formen*

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})dx_1 + \ldots + F_n(\mathbf{x})dx_n$$

där $F_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^1(D)$.

Detta är alltså ett abstrakt uttryck, som för en fix punkt $\mathbf{a} \in D$, definierar en linjär avbildning

$$F(\mathbf{a}) : T_{\mathbf{a}}(D) \to \mathbb{R}$$

genom formeln

$$F(\mathbf{a})(X) = F_1(\mathbf{a})dx_1(X) + \ldots + F_n(\mathbf{x})dx_n(X).$$

Ett exempel på en 1-form är alltså ett vektorfält, $F = (P,Q)$ motsvaras av differentialformen

$$F = Pdx + Qdy.$$

Dessa kan integreras längs orienterade kurvor γ, via en parametrisering $\mathbf{r}(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, via formeln

$$\int_\gamma F = \int_a^b (Pdx + Qdy)\,(\mathbf{r}'(t))dt = \int_a^b \big(Pdx(\mathbf{r}'(t)) + Qdy(\mathbf{r}'(t))\big)\, dt = \int_a^b \big(Pr_1'(t) + Qr_2'(t)\big)\, dt.$$

Detta är helt samma definition som (3). Vi skulle kunnat definiera differentialformer utifrån hur man integrerar det längs orienterade kurvor. Då skulle tangentvektorerna kommit in i bilden när vi motiverat att vi måste följa orienteringen och att kurvan alltså har en riktning. Men andra ord är en potentiell definition, och minnesregel:

1-former är något man kan integerara längs orienterade kurvor.

Notera att det inte alls är så att alla differentialformer är på formen df, dvs. alla differentialformer är inte differentialer. Det ser enklast för $n = 2$, eftersom $df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. För att en 1-form $F(x, y) = Pdx + Qdy$ ska vara på den formen, måste åtminstone

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

dvs. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Det är en differentialekvation som inte alltid har en lösning, t.ex. om $P(x, y) = y, Q(x, y) = 1$.

Definition 3.3. *En differentialform $F = Pdx+Qdy$ som är på formen df säges vara exakt. En 1-form där $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ säges vara* sluten.

Enligt diskussionen och exemplet ovan är varje exakt 1-form sluten. Vi kommer se senare att det finns 1-former som är slutna men inte exakta, det kommer bero på hur definitionsområdet D för F "ser ut" (har det hål eller inte).

Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet, Göteborg, Sweden
E-mail address: dener@chalmers.se