Tentamen i Flervariabelanalys, MVE035
2016-08-23, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: anknytning 5361
Telefonvakt: Dennis Eriksson
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida. Talen i parentes bredvid uppgifterna och deluppgifterna anger antalet poäng de ger.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.
Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt $f(x,y) = x + 4y - \frac{2}{xy}$.
   (a) Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $3 = f(x,y)$ i punkten $(1,1)$. (2)
   (b) Bestäm Taylorutvecklingen av f upp till grad 2 i punkten $(1,1)$. (2)
   (c) Finn och klassificera kritiska (boken: *stationära*) punkter till f. (2)
   (d) Avgör om funktionen har global max eller min i området $x, y > 0$. Motivera! (2)
2. Beräkna arean av ytan $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. (4)
3. Betrakta vektorfältet $\mathbf{B}(x,y,z) = \left(\frac{-ay}{x^2+y^2}, \frac{bx}{x^2+y^2}, 0\right)$ definierat utanför $x = y = 0$, och där $a, b \in \mathbb{R}$ är konstanter.
   (a) Bestäm relationen mellan konstanterna a och b så att $\mathbf{B}$ blir rotationsfritt. (3)
   (b) Med $\mathbf{B}$ rotationsfritt som ovan, bestäm a och b precist så att arbetsintegralen längs enhetscirkeln, orienterad moturs, i planet $z = 0$ blir 2π. (2)
   (c) Har $\mathbf{B}$ en potential? Motivera! (1)
4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (-y\sin(x^3), y^2)$. Beräkna, med hjälp av Greens sats, arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs randen C, positivt orienterad, till området D som begränsas av $x = \sqrt{y}, x = 1, y = 0$ och $y = 1$. (5)
5. Låt K vara området som begränsas av $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$.
   (a) Beräkna volymen för den del av K som ligger i första oktanten. (3)

(b) Beräkna flödet ut ur randen Y av K av vektorfältet som ges av (4)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3 + \sin(zx), e^{-x^3-y^3}).$$

6. Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens. (6)

7. I denna uppgift är $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en funktion.
   (a) Definiera vad det innebär att f är *differentierbar* respektive $\mathcal{C}^1$. (2)
   (b) Visa att om f är $\mathcal{C}^1$ så är f *differentierbar*. (5)

8. Låt $I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$. Den konvergerar.
   (a) Visa att om $y > 0$ så kan funktionen $I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-yx} dx$ "*deriveras under integraltecknet*". (2)
   (b) Räkna ut $I'(y)$ och använd detta för att bestämma $I = I(0)$. (5)

Totalt 8 frågor med totalt 50 poäng. Lycka till! /Dennis

Lösning 1a: Eftersom det kommer behövas i de andra deluppgifterna räknar vi ut de partiella derivatorna till f. De ges av $f_x = 1 + \frac{2}{x^2y}, f_y = 4 + \frac{2}{xy^2}, f_{xx} = -\frac{4}{x^3y}, f_{xy} = -\frac{2}{x^2y^2}, f_{yy} = -\frac{4}{xy^3}$.
Tangentlinjens ekvation i $(1,1)$ ges av $0 = f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)$. Eftersom $f_x(1,1) = 3, f_y(1,1) = 6$ får vi ekvationen $x + 2y - 3 = 0$.
Lösning 1b: Taylorutvecklingen av f i (a,b) upp till grad 2 ges av

$$P(h,k) = f(a,b) + f_x(a,b)h + f_y(a,b)k + \frac{1}{2}[f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2].$$

Här har vi satt $h = x - a, k = y - b$. Direkt insättning ger oss i detta fallet

$$P(h,k) = 3 + 3h + 6k - 2h^2 - 2hk - 2k^2.$$

Lösning 1c: De kritiska punkterna ges av ekvationerna $f_x = f_y = 0$, vilket resulterar i ekvationssystemet $x^2y = -2, 2xy^2 = -1$. Genom att lösa ut $y = -2/x^2$ får man snabbt $x^3 = -8$, dvs. $x = -2$, och således är $y = -1/2$. Vi studerar dess karaktär via den kvadratiska formen $f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2$. Insättning av värden ger i punkten $(a,b) = (-2,-1/2)$ formen

$$-h^2 - 4hk - 16k^2 = -(h+2k)^2 - 12k^2.$$

Den är alltså negativt definit, och punkten är således ett strängt lokalt maximum.
Lösning 1d: Då $x, y \to 0$ så blir termen $-2/xy$ godtyckligt negativt. Alltså kan inte globalt minimum finnas. Å andra sidan, då x, y växer för positiva x och y går termen $-2/xy$ mot noll, men $x + 4y$ blir godtyckligt stor. Alltså finns inte globalt maximum.

Lösning 2: Ytan ges av $z = f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$, och har alltså ytarea-elementet $dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$. Ytan parametriseras lättast med polära koordinater $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, dxdy = rdrd\theta, 0 \le r \le 1, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Det ger oss integralen

$$\iint_S dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}rdrd\theta = \pi\int_0^1 \sqrt{1+r^2}rdr.$$

Integralen räknas ut via variabelbytet $u = 1 + r^2, du = 2rdr$, vilket ger

$$\int_0^1 \sqrt{1+r^2}rdr = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}du = \frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^2 = \frac{(2^{3/2}-1)}{3}.$$

Vi får alltså att arean av ytan ges av $\frac{\pi}{3}(2^{3/2}-1)$.
Lösning 3a: Rotationen av vektorfältet ges i det här fallet av $\left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x}\frac{bx}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-ay}{x^2+y^2}\right)$. Man räknar snabbt ut $\frac{\partial}{\partial x}\frac{bx}{x^2+y^2} = \frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{\partial}{\partial y}\frac{-ay}{x^2+y^2} = \frac{a(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. För att rotationen ska vara noll måste således

$$\frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{a(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Vi får alltså relationen $a = b$.
Lösning 3b: Enhetscirkeln C i planet $z = 0$ kan parametriseras som $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vi får $d\mathbf{r} = (dx, dy) = (-\sin\theta, \cos\theta)d\theta$. Eftersom $a = b$ så får vi $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(a\sin^2\theta + a\cos^2\theta\right) d\theta = 2\pi a$. Alltså måste $a = b = 1$.
Lösning 3c: Nej. Om $\mathbf{B} = \nabla\phi$ för en funktion ϕ så är alla arbetsintegraler vägoberoende. Det innebär å andra sidan att vägintegralen längs alla slutna kurvor nödvändigtvis är noll, men i exemplet ovan med $a = b = 1$ så får vi svaret 2π.
Lösning 4: Greens sats säger att

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_D (Q_x - P_y)\, dA.$$

I detta fallet får vi alltså att arbetsintegralen ges av

$$\iint_D \sin(x^3) dxdy.$$

Beroende på ordningen, får vi alltså att integralen ges av en av följande två integraler

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3) dydx.$$

Den första integralen ser svår att räkna ut, så vi försöker med den andra. Vi får $\int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3) dydx = \int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx$. Denna räknas ut genom att sätta $u = x^3, du = 3x^2 dx$, vilket ger $\frac{1}{3}\int_0^1 \sin(u) du = \frac{1-\cos(1)}{3}$.
Lösning 5a: Området K parametriseras lättast med polära koordinater: $x = R\cos\theta\sin\phi, y = R\sin\phi, z = R\cos\phi, 1 \leq R \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, dV = R^2\sin\phi dR d\phi d\theta$. Integralen blir således

$$\iiint_K dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 R^2 \sin\phi dR d\phi d\theta = 7/3 * \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) * 2\pi = 7/3 * \sqrt{2} * (2 - \sqrt{2}).$$

Volymen av området som ligger i första oktanten är en fjärdedel av detta, vilket ger volymen $7/3 * \sqrt{2} * (2 - \sqrt{2})/4$.
Lösning 5b: Det lättaste angreppssättet borde vara att använda Gauss divergenssats, som säger att flödet ut ur Y ges av $\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dV$. Divergensen ges av $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2) = 3R^2\sin^2\phi$. Med samma parametrisering som ovan, får vi alltså att flödet ut ur området ges av

$$3\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 R^4 \sin^3\phi dR d\phi d\theta = 3 * 31/5 * \left[-\cos\phi + \frac{\cos^3(\phi)}{3}\right]_0^{\pi/4} * 2\pi = 31\frac{4\sqrt{2}-5}{10\sqrt{2}}.$$

Lösning 6: Se boken
Lösning 7: Se boken

Lösning 8a: Eftersom $\|\sin(x)\| \leq \|x\|$ får vi uppskattningen $\|\frac{\sin(x)}{x}e^{-yx}\| \leq e^{-yx}$, vilket innebär att relevanta uppskattningar är uppfyllda för att få derivera under integraltecknet.
Lösning 8b: För $y > 0$ deriverar vi med avseende på y, och får

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}e^{-yx}dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\frac{\sin(x)}{x}e^{-yx}dx = -\int_0^\infty \sin(x)e^{-yx}dx.$$

Denna integral går att räkna ut via partiell integrering, och vi får $I'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$. Således är $I(y) = -\arctan y + C$ för en konstant C. Om vi tar $y = \infty$, eller godtyckligt stort, är $I(y) = 0$, eller godtyckligt litet. Eftersom $\arctan(y)$ går mot $\pi/2$ då y går mot oändligheten får vi att $C = \pi/2$. Eftersom $I(y)$ är kontinuerlig för $y \geq 0$ kan vi nu sätta $y = 0$ och får $I(y) = -\arctan(0) + \pi/2 = \pi/2$.