Tentamen i Flervariabelanalys, MVE035
2016-08-23, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: anknytning 5361
Telefonvakt: Dennis Eriksson
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida. Talen i parentes bredvid uppgifterna och deluppgifterna anger antalet poäng de ger.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.
Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt $f(x, y) = x + 4y - \frac{2}{xy}$.
   (a) Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan $3 = f(x, y)$ i punkten $(1, 1)$. (2)
   (b) Bestäm Taylorutvecklingen av f upp till grad 2 i punkten $(1, 1)$. (2)
   (c) Finn och klassificera kritiska (boken: *stationära*) punkter till f. (2)
   (d) Avgör om funktionen har global max eller min i området $x, y > 0$. Motivera! (2)

2. Beräkna arean av ytan $S = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$. (4)

3. Betrakta vektorfältet $\mathbf{B}(x, y, z) = \left(\frac{-ay}{x^2+y^2}, \frac{bx}{x^2+y^2}, 0\right)$ definierat utanför $x = y = 0$, och där $a, b \in \mathbb{R}$ är konstanter.
   (a) Bestäm relationen mellan konstanterna a och b så att $\mathbf{B}$ blir rotationsfritt. (3)
   (b) Med $\mathbf{B}$ rotationsfritt som ovan, bestäm a och b precist så att arbetsintegralen längs enhetscirkeln, orienterad moturs, i planet $z = 0$ blir 2π. (2)
   (c) Har $\mathbf{B}$ en potential? Motivera! (1)

4. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (-y\sin(x^3), y^2)$. Beräkna, med hjälp av Greens sats, arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs randen C, positivt orienterad, till området D som begränsas av $x = \sqrt{y}, x = 1, y = 0$ och $y = 1$. (5)

5. Låt K vara området som begränsas av $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$.
   (a) Beräkna volymen för den del av K som ligger i första oktanten. (3)

(b) Beräkna flödet ut ur randen Y av K av vektorfältet som ges av (4)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3 + \sin(zx), e^{-x^3-y^3}).$$

6. Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens. (6)

7. I denna uppgift är $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en funktion.

   (a) Definiera vad det innebär att f är *differentierbar* respektive $\mathcal{C}^1$. (2)

   (b) Visa att om f är $\mathcal{C}^1$ så är f *differentierbar*. (5)

8. Låt $I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$. Den konvergerar.

   (a) Visa att om $y > 0$ så kan funktionen $I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-yx} dx$ "*deriveras under integraltecknet*". (2)

   (b) Räkna ut $I'(y)$ och använd detta för att bestämma $I = I(0)$. (5)

Totalt 8 frågor med totalt 50 poäng. Lycka till! /Dennis