Lösningar till tentan 2012 01 11

1. (a) Vi studerar första- och andraderivatorna av funktionen i punkten $(3,3)$.

$$f'_x = 3x^2 - 9y, \quad f'_y = 3y^2 - 9x$$

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = -9, \quad f''_{yy} = 6y$$

Vi konstaterar att förstaderivatorna är noll i $(3,3)$, som alltså mycket riktigt är en stationär punkt. Dess karaktär bestäms av den kvadratiska formen

$$Q(h) = f''_{xx}(3,3)h^2 + 2f''_{xy}(3,3)hk + f''_{yy}(3,3)k^2, \text{ där } h = x-3, \ k = y-3,$$

dvs

$$Q(h) = 18(h^2 - hk + k^2) = 18\Big((h - \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2)\Big)$$

som är *positivt definit* (dvs positiv för alla $(h,k) \neq (0,0)$).

Detta medför att $\boxed{\mathbf{(3,3)} \textbf{ är ett lokalt minimum}}$.

(b) Om U är en potential till $\boldsymbol{F}$ så gäller $\nabla U = \boldsymbol{F}$, dvs $U'_x = (1+x)e^{x+y}, \ U'_y = xe^{x+y} + 2y, \ U'_z = -2z$. Den andra likheten ger oss $U = xe^{x+y} + y^2 + g(x,z)$, varefter vi deriverar detta med avseende på x och jämför med förstakomponenten av $\boldsymbol{F}$: $U'_x = (1+x)e^{x+y} + g'_x(x,z) = (1+x)e^{x+y}, \Rightarrow g(x,z) = h(z)$. Vi har nu $U = xe^{x+y} + y^2 + h(z)$, vilket deriveras med avseende på z och jämförs med tredjekomponenten av $\boldsymbol{F}$: $U'_z = h'(z) = -2z$. Därmed kan vi välja $h(z) = -z^2$.

En potential för $\boxed{\boldsymbol{F} \text{ är } \mathbf{U(x,y,z) = xe^{x+y} + y^2 - z^2}}$.

(c) Vi söker en karakteristisk kurva för vårt uttryck $Pu'_x + Qu'_y$, i vilket $P = x, \ Q = 2y$. En sådan är lösning till den ordinära differentialekvationen $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} \iff \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{2y} \iff 2\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, vilken är separabel och har lösningarna $2\ln x = \ln y + \ln C \iff \dfrac{x^2}{y} = C$. Ett koordinatbyte som fungerar är då enligt teorin $\boxed{\mathbf{s = \dfrac{x^2}{y}, \ t = y}}$. Detta koordinatbyte ger (kedjeregeln): $u'_x = u'_s \dfrac{2x}{y}, \ u'_y = u'_s \dfrac{-x}{y^2} + u'_t$ och slutligen $\boxed{\mathbf{xu'_x + 2yu'_y = 2tu'_t}}$.

2. Fyrhörningen är en parallellogram som begränsas av de räta linjerna $x+y=0$, $x+y=3$, $2y-x=0$ och $2y-x=3$. gör därför variabelbytet $u = x+y, \ v = 2y-x$.
Då motsvaras området D av kvadraten $D' = \{(u,v): \ 0 \le u \le 3, \ 0 \le v \le 3\}$. Vi har

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$dxdy = \frac{d(x,y)}{d(u,v)}dudv = \frac{1}{3}dudv$$

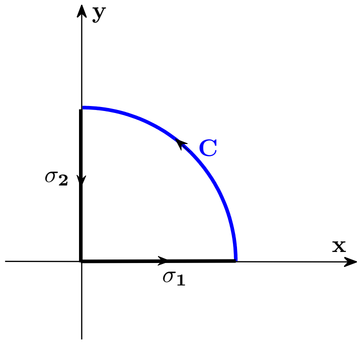
och vidare är $x = \dfrac{1}{3}(2u-v)$. Alltså är

$$\iint_D xe^{x+y}\,dxdy = \iint_{D'} \frac{1}{3}(2u-v)e^u \frac{1}{3}\,dudv = \frac{1}{9}\int_0^3 \Big(\int_0^3 (2u-v)e^u\,dv\Big)\,du = \frac{1}{9}\int_0^3 (6u - \frac{9}{2})e^u\,du =$$

$$= \frac{1}{9}\Big[(6u - \frac{9}{2})e^u\Big]_0^3 - \int_0^3 6e^u\,du =$$

$$\boxed{\mathbf{\frac{1}{6}(5e^3 + 7)}}$$

3. (a) Genom att komplettera kvartscirkelbågen C med bitar av koordinataxlarna σ_1 och σ_2 får vi en sluten kurva och kan använda Greens formel, eftersom fältet är $\mathcal{C}^1$ överallt, bara kurvan ges rätt orientering, så som figuren visar.



Med hjälp av Greens formel kan vi nu skriva det sökta arbetet

$$W = \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_D (\frac{\partial}{\partial x}(x^2+e^{x+y}) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+e^{x+y}))\,dxdy - \int_{\sigma_1}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{\sigma_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} =$$

$$= \iint_D 2x\,dxdy - \int_0^1 (x^2+e^y)\,dx - \int_1^0 e^y\,dy = \{\text{polära koordinater, } |J| = r\ \} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (2r\cos\theta)r\,drd\theta - (e-\frac{2}{3}) - (1-e) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\cdot\int_0^1 r^2\,dr - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Arbetet är $\boxed{\mathbf{\frac{1}{3}}}$.

(b) Planet och cirkeln samt $\boldsymbol{u}$ uppfyller villkoren för Stokes sats, vilken då ger

$$\int_C \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y \boldsymbol{rotF}\cdot\boldsymbol{N}dS$$

där Y är den del av planet $z = x$ som begränsas av cirkeln C och där $\boldsymbol{N}$ har riktning uppåt (med avseende på z). Ur planets ekvation $1x + 0y - 1z = 0$ får vi en enhetsnormalvektor i önskad riktning $\boldsymbol{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$. Vi beräknar först $\boldsymbol{rotF}$:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_x} & \boldsymbol{e_y} & \boldsymbol{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & 2x-z & 3x+2y \end{vmatrix} = (2-(-1), 0-3, 2-1) = (3, -3, 1)$$

Nu kan vi beräkna vår integral, där vi utnyttjar att integranden blir en konstant:

$$\iint_Y \boldsymbol{rotF}\cdot\boldsymbol{N}dS = \iint_Y (3,-3,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\,dS = \iint_Y -\sqrt{2}\,dS = -\sqrt{2}\,area(Y) = -\pi\sqrt{2}$$

Svar: $\boxed{-\pi\sqrt{\mathbf{2}}}$.

Uppgiften (både a och b) kan också lösas direkt via parametrisering av respektive kurva, men det är jobbigare.

4. Komplettera med "botten" $Y_1 = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \le 1\}$ så att $Y + Y_1$ blir rand till kroppen $K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$. Vi har normalriktning utåt från K, så med Gauss sats får vi:

$$\iint_{Y+Y_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS = \iiint_K \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,dxdydz = \iiint_K 4z^2\,dxdydz = \iint_{Y_1}\left(\int_0^{1-x^2-y^2} 4z^2\,dz\right)dxdy =$$

$$= \iint_{Y_1} \frac{4}{3}(1-x^2-y^2)^3\,dxdy = \{\text{polära koordinater}\} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{4}{3}(1-r^2)^3 r\,drd\theta = 2\pi\int_0^1 \left[-\frac{1}{6}(1-r^2)^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Nu är $\iint_{Y+Y_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS = \iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS + \iint_{Y_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS$ med nedåtriktad normal för Y_1 och

$$\iint_{Y_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS = \iint_{Y_1} \boldsymbol{F(x,y,0)}\cdot(0,0,-1)\,dS = -\iint_{Y_1} y^2\,dxdy = \{\text{polära koordinater, } |J| = r\ \} =$$

$$= -\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\theta\,r\,drd\theta = -\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{4}$$

Alltså är $\iint_Y \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{N}\,dS = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \boxed{\mathbf{\frac{7\pi}{12}}}$.

Uppgiften kan lösas direkt genom parametrisering av paraboloidytan, men det blir klart jobbigare.

5. Vi vill derivera en funktion given på formen $F(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx$, en konvergent integral för varje $y > 0$. Teorin säger att funktionen är deriverbar för $y \in (0,\infty)$ med derivatan $F'(y) = \int_0^\infty f_y'(x,y)\,dx$ om följande förutsättningar är uppfyllda:

- $f(x,y)$ och $f_y'(x,y)$ är kontinuerliga för $(x,y) \in [0,\infty) \times (0,\infty)$,
- för varje kompakt delintervall $\alpha \le y \le \beta$ av $(0,\infty)$ finns en funktion $g(x)$ sådan att $|f_y'(x,y)| \le g(x)$ för $(x,y) \in [0,\infty) \times (\alpha,\beta)$ och $\int_0^\infty g(x)\,dx$ är konvergent.

Vår integrand är "skenbart" odefinierad då $x = 0$, men om vi sätter

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(xy)}{x(1+x^2)} & \text{om} \quad x \neq 0 \\ y & \text{om} \quad x = 0 \end{cases}$$

så får vi $f_y'(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}$ för alla $(x,y) \in [0,\infty) \times (0,\infty)$ och båda dessa funktioner blir kontinuerliga i $[0,\infty) \times (0,\infty)$ och $F(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx$ är den givna funktionen.

Integralen $F(y)$ är konvergent för alla $y > 0$, eftersom integranden $|f(x,y)| < \dfrac{\pi}{2x^3}$ och $\int_1^\infty \dfrac{\pi}{2x^3}\,dx$ är konvergent (jämförelsekriteriet).

Vidare är för varje intervall $\alpha \le y \le \beta$ enligt ovan $f_y'(x,y) \le g(x)$ med $g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+\alpha^2x^2)}$ och $\int_0^\infty g(x)\,dx$ är konvergent. Vi kan alltså derivera $F(y)$ som vi vill:

$$F'(y) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}\,dx = \{\text{ partialbråksuppdela }\} = \frac{1}{1-y^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{1-y^2}\Big[\arctan x - y\arctan(xy)\Big]_0^\infty = \frac{1}{1-y^2}\frac{\pi}{2}(1-y) = \frac{\pi}{2(1+y)}$$

Vi får då $F(y) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+y)$ och $F(1) = \int_0^\infty \dfrac{\arctan(x)}{x(1+x^2)}\,dx = \dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

$$\boxed{F'(y) = \frac{\pi}{2(1+y)},\quad F(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y),\quad F(1) = \frac{\pi}{2}\ln 2}.$$