Lösningar till tentan 2012 03 08

1. (a) Vi deriverar: $f'_x(x,y) = y - \dfrac{8}{x^2}$ $f'_y(x,y) = x - \dfrac{1}{y^2}$.
Tangentplanets ekvation:

$$z = f(2,1) + f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1) \iff z = 7-(x-2)+(y-1) \iff \mathbf{x - y + z = 8}$$

(b) För stationär(a) punkt(er) löser vi ekvationssystemet $\nabla f = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} y - \frac{8}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{1}{y^2} &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= \frac{8}{x^2} \\ x &= \frac{x^4}{64} \end{cases} \iff \begin{cases} y &= \frac{8}{x^2} \\ x^3 &= 64 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 4 \\ y &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Enda stationära punkt är alltså $(4, \dfrac{1}{2})$. Dess karaktär bestäms av den kvadratiska formen

$Q(h) = f''_{xx}(4,\dfrac{1}{2})h^2 + 2f''_{xy}(4,\dfrac{1}{2})hk + f''_{yy}(4,\dfrac{1}{2})k^2$ där $h = x-4,\ k = y - \dfrac{1}{2}$.

Vi har $f''_{xx}(x,y) = \dfrac{16}{x^3},\ f''_{xy}(x,y) = 1,\ f''_{yy}(x,y) = \dfrac{2}{y^3}$, vilket ger

$Q(h) = \dfrac{h^2}{4} + 2hk + 16k^2 = \dfrac{1}{4}((h+4k)^2 + 48k^2)$, som är *positivt definit* (dvs positiv för alla $(h,k) \neq (0,0)$).
Detta medför att $(\mathbf{4}, \mathbf{\dfrac{1}{2}})$ är ett **lokalt minimum**.

(c) Parametrisera sträckan: $\boldsymbol{r}(t) = (1,0) + t((2,1)-(1,0)) = (1+t,t),\ 0 < t < 1$.
Arbetet blir $W = \displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt = \int_0^1 ((1+t)t, -(1+t)^2) \cdot (1,1)\,dt = \int_0^1 (-t-1)\,dt = -\mathbf{\frac{3}{2}}$.

(d) En garanti för lokal bijektivitet är att avbildningens funktionaldeterminant (Jakobian) är skild från noll.
Vi undersöker detta:

$$\begin{vmatrix} 2x & -4y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix} = 6xy(y+2x)$$

Detta innebär att lokal bijektivitet föreligger åtminstone i **alla punkter utom de som ligger på koordinataxlarna och de som ligger på linjen $\mathbf{2x + y = 0}$**. (Undersökning av dessa punkter krävdes inte).

2. Ytan parametriseras lätt av x- och y-koordinaterna:

$$\boldsymbol{r}(x,y) = (x,y,x^2+2y), \quad \text{med normalvektor } \boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-2x, -2, 1)$$

Arean är då integralen av normalvektorns längd över parameterområdet $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$, dvs

$$A = \iint_D |(-2x,-2,1)|\,dxdy = \iint_D \sqrt{4x^2+5}\,dxdy = \int_0^1 \sqrt{4x^2+5}\,dx \int_0^x dy = \int_0^1 x\sqrt{4x^2+5}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{12}(4x^2+5)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \mathbf{\frac{27 - 5\sqrt{5}}{12}}$$

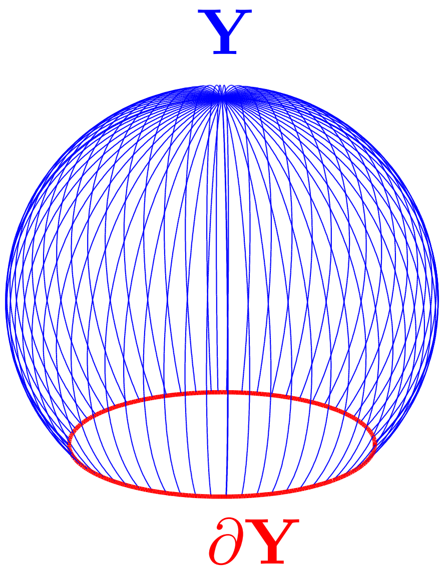
3. Upprepad integration ger:

$$\iiint_D xz\,dxdydz = \left(\text{med } E = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}\right) = \iint_D dxdy \int_0^y xz\,dz = \iint_D \frac{xy^2}{2}\,dxdy =$$

$$\left(\text{med polära koordinater, } J = r\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \frac{r^3 \cos\theta \sin^2\theta}{2} r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta\,d\theta \int_0^2 \frac{r^4}{2}\,dr =$$

$$= \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^5}{10}\right]_0^2 = \mathbf{\frac{16}{15}}$$

4. Vi bekantar oss först med ytan, som är en (stor) del av en sfär. Centrum är $(0,0,1)$, radien $\sqrt{2}$. Dess rand är enhetscirkeln i xy-planet (sätt in $z=0$ i sfärens ekvation), som är markerad med rött i figuren.



Ytan och fältet är jättesnälla och *Stokes sats* kan tillämpas. Att integrera $(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N}$ över ytan Y är enligt Stokes sats detsamma som att integrera $\boldsymbol{F}$ längs kurvan ∂Y, förutsatt att vi väljer orienteringen rätt. I detta fall är normalen på ”lampkupan” riktad utåt (från z-axeln), vilket betyder att ∂Y ska genomlöpas i positiv led i xy-planet (där den ju ligger). På ∂Y är $z=0$ och därmed formellt $dz = 0$, vi får:

$$I = \iint_Y (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{N} dS = \int_{\partial Y} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r} = \int_{\partial Y} y\cos(xz)\,dx - xy\sin(z^2)\,dy + e^{x^2}\,dz = \int_{\partial Y} y\,dx + 0\,dy$$

Nu kan vi parametrisera enhetscirkeln, men vi kan också använda Greens formel (Stokes sats i planet) för att återgå till en ytintegral, som i det plana fallet är en dubbelintegral. Om D betecknar enhetscirkelskivan blir det till slut:

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (-1)\,dxdy = -m(D) = -\boldsymbol{\pi}$$

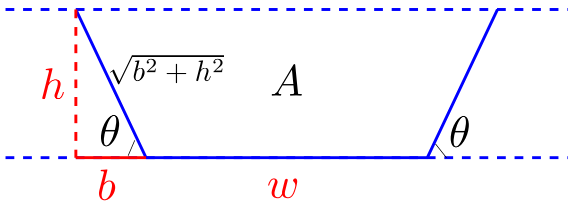
5. Vi kan välja de tre sträckorna $w,\ b,\ h$ (se figuren nedan!) som variabler. Då har vi vår målfunktion

$$P(w,b,h) = w + 2\sqrt{b^2+h^2}$$

som ska minimeras under bivillkoret att tvärsnittsarean är A, dvs att $g(w,b,h)=0$, där

$$g(w,b,h) = h(b+w) - A$$

(arean utgörs av två rektangelareor med samma höjd h). Vi förutsätter förstås att $A>0$.



Vi betraktar först en kompakt delmängd av variabelrummet:

$$M = M_1 \cap M_2 = \{(w,b,h) : 0 \le w \le W,\ 0 \le b \le B,\ 0 \le h \le H\} \cap \{(w,b,h) : g = 0\}$$

och eftersom P är kontinuerlig på M har P både största och minsta värde där. Om detta inträffar i en "inre" punkt av M (med vilket här menas i snittet mellan M_2 och det inre av M_1), så säger teorin med Lagranges multiplikatormetod ("undantagsfallet" $\nabla g = \mathbf{0}$ är inte aktuellt, eftersom det motsvarar
$h=b=w=0$ och därmed $g=-A\neq 0$) att denna punkt är lösning till systemet

$$\begin{cases} \nabla P &= \lambda \nabla g \\ g &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 &= \lambda h \\ \frac{2b}{\sqrt{b^2+h^2}} &= \lambda h \\ \frac{2h}{\sqrt{b^2+h^2}} &= \lambda(b+w) \\ A &= h(b+w) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2b}{\sqrt{b^2+h^2}} &= 1 \\ \frac{2h}{\sqrt{b^2+h^2}} &= \frac{b+w}{h} \\ A &= h(b+w) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} h &= b\sqrt{3} \\ 6b^2 &= 2b(b+w) \\ A &= \sqrt{3}b(b+w) \end{cases} \iff \begin{cases} w &= \sqrt{\frac{4A}{3\sqrt{3}}} \\ b &= \sqrt{\frac{A}{3\sqrt{3}}} \\ h &= \sqrt{\frac{A}{\sqrt{3}}} \end{cases}$$

Detta ger därtill $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ \Rightarrow\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$, och i den funna punkten blir $P = \sqrt{4\sqrt{3}A}$.
För att ordentligt motivera att detta är vårt minimum, konstaterar vi att om gränserna W, B och H vi valt i den kompakta avskärningen M är stora nog (t. ex. $=\sqrt{A}$), så är den punkt som befanns vara den enda lösningen till vårt system en "inre" punkt i M. Om vi kan fastställa att värdena av P på randen av M och utanför M är större än i denna punkt, så återstår bara den möjligheten att den funna punkten är minimum av P då $g=0$, både på M och globalt. För $w \ge W,\ b \ge B,\ h \ge H$ växer P i vardera variabeln, så dessa riktningar är inga problem. För $h=0$ kan inte bivillkoret gälla. Återstår då två randytor: $w=0$ och $b=0$.

$$w = 0 \ \Rightarrow\ bh = A,\ P = 2\sqrt{b^2 + \frac{A^2}{b^2}}$$

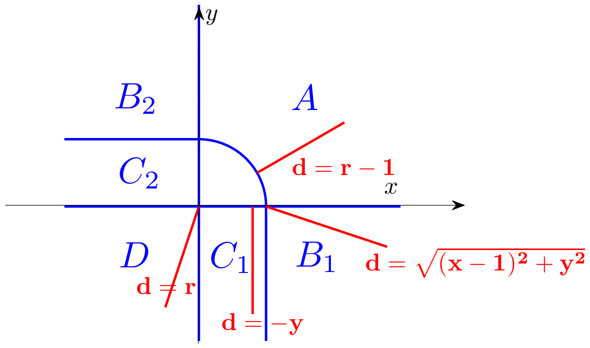
$$b = 0 \ \Rightarrow\ wh = A,\ P = w + \frac{2A}{w}$$

I båda dessa fall deriverar vi och hittar minsta värden, här utan detaljer:
$P(0,\sqrt{A},\sqrt{A}) = \sqrt{8A}$ samt $P(\sqrt{2A},0,\sqrt{\frac{A}{2}}) = \sqrt{8A}$. Dessa är större än det tidigare funna värdet $\sqrt{4\sqrt{3}A}$ som alltså är vårt minimum.

Svar: För minimalt P ska vi ha $\boldsymbol{w} = \sqrt{\frac{\mathbf{4A}}{\mathbf{3\sqrt{3}}}}$, $\boldsymbol{h} = \sqrt{\frac{\mathbf{A}}{\sqrt{\mathbf{3}}}}$ och $\boldsymbol{\theta} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$.

(Det går förstås bra att arbeta med variablerna $w,\ h,\ \theta$ också.)

6. Vi delar in området i 6 delar enligt figuren: $E = A \cup B_1 \cup B_2 \cup C_1 \cup C_2 \cup D$.



I varje delområde har funktionen $d(x, y)$ en speciell form. Av symmetriskäl blir bidragen lika från B_1 och B_2, liksom från C_1 och C_2. Därför är $\iint_E = \iint_A +2\iint_{B_1} +2\iint_{C_1} + \iint_D$.

Vi konstaterar också att $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_\infty^0 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (jämn integrand).

I område A är $d(x, y) = r - 1$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (förläng radien från origo till (x, y)).

I område B_1 är $d(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ (eftersom $(1, 0)$ är närmaste punkt i kvartscirkeln).

I område C_1 är $d(x, y) = -y$

I område D är $d(x, y) = r$ (origo närmaste punkt).

$$\iint_A e^{-d(x,y)^2}\,dxdy = \iint_A e^{-(r-1)^2}\,dxdy = \{\text{ polära koordinater }\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^\infty re^{-(r-1)^2}\,drd\theta =$$

$$\{\text{Byt till } s = r - 1 \text{ i inre integralen}\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty (s+1)e^{-s^2}\,drd\theta = \frac{\pi}{2}\left(\left[-\frac{e^{-s^2}}{2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-s^2}\,dr\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}$$

I B_1 använder vi polära koordinater centrerade kring $(1, 0)$, dvs

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad J = r,\ 0 \le r < \infty,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$$

$$\iint_{B_1} e^{-d(x,y)^2}\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta \int_0^\infty re^{-r^2}\,dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{C_1} e^{-d(x,y)^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\infty}^0 e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

I område D är det åter polära koordinater som gäller:

$$\iint_D e^{-d(x,y)^2}\,dxdy = \iint_A e^{-r^2}\,dxdy = \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty re^{-r^2}\,dr = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$$

Slutligen har vi därmed

$$\iint_E e^{-d(x,y)^2}\,dxdy = \iint_A +2\iint_{B_1} +2\iint_{C_1} + \iint_D = \boldsymbol{\pi + \sqrt{\pi} + \frac{\pi\sqrt{\pi}}{4}}$$