Lösningsanvisningar och svar till tentan 2013 01 14

1. (a) Ytan är en funktionsyta $f = 1$. Beräkna $\nabla f(1,-1,1) = (5,1,-2)$. Då är tangentplanets ekvation: $\nabla f(1,-1,1)\cdot(x-1,y+1,z-1) = 0$, vilket ger svaret $\mathbf{5x + y - 2z = 2}$.

   (b) Lös $\nabla f = \mathbf{0}$. Lösningarna $(0,0)$ och $(4,12)$ är de stationära punkterna. Undersök den kvadratiska formen $Q(h) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2$ i vardera punkten. I $(0,0)$ visar den sig vara indefinit - alltså en **sadelpunkt i $(\mathbf{0},\mathbf{0})$**. I $(4,12)$ är den positivt definit - därmed en **lokal minimipunkt i $(\mathbf{4},\mathbf{12})$**.

   (c) Med $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ har vi $z'_r = z'_x x'_r + z'_y y'_r = z'_x\cos\theta + z'_y\sin\theta$, så $rz'_r = z'_x r\cos\theta + z'_y r\sin\theta = xz'_x + yz'_y$. Alltså: $\boldsymbol{xz'_x + yz'_y = rz'_r}$.

   (d) Om funktionaldeterminanten $\det \boldsymbol{f}'(P) \neq \mathbf{0}$, så är enligt inversa funktionssatsen $\boldsymbol{f}$ lokalt inverterbar kring P. Inversen är inversa matrisen till $\boldsymbol{f}'(P)$.

$$\boldsymbol{f}'(P) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

   Då $\det \boldsymbol{f}'(P) = -2$, så har vi inversen

$$(\boldsymbol{f}^{-1})' = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}$$

   och svaren kan avläsas element för element.

2. (a) Upprepad integration, t ex först i y-led över $1 \le y \le 2/x$, sedan i x-led över $1 \le x \le 2$ ger oss svaret $\mathbf{\ln 4 - \frac{3}{4}}$.

   (b) Differentialformen är *exakt* med potentialen $U(x,y) = xy^2 - 3x^2y$, och integralen beror då bara på start- och slutpunkt: $I = U(-3,2) - U(2,1) = \mathbf{-56}$.

3. Vi maximerar alltså $f = xyz$ under bivillkoret $x + y + z = a,\ a > 0$, där $x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$. Vi får då en kompakt mängd (triangel) på vilken f garanterat har både största och minsta värde enligt en sats. Minsta värdet (på hela randen av triangeln) är noll, i det inre är $f > 0$ och där finns maximum. Använd t ex Lagrange multiplikatormetod, som ger en enda kandidat till maximum, nämligen $x = y = z = a/3$ med $f_{max} = (a/3)^3$. På varje plan $x + y + z = a$ är alltså $xyz \le (a/3)^3 = ((x+y+z)/3)^3$, varur den sökta olikheten följer i hela första oktanten.

4. Medelvärdet är

$$z_T = \frac{\iiint_K z\,dxdydz}{\iiint_K dxdydz}$$

   Båda integralerna beräknas med upprepad integration, snitta vinkelrätt mot z-axeln. Vi integrerar då först över cirkelskivan $x^2 + y^2 \le z$, sedan över intervallet $a \le z \le b$. Man får då

$$\iiint_K dxdydz = \frac{\pi(b^3 - a^3)}{3},\quad \iiint_K z\,dxdydz = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{4}$$

   och efter förenkling $\mathbf{z_T} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\dfrac{\mathbf{(a+b)(a^2+b^2)}}{\mathbf{a^2+ab+b^2}}$.

5. Ett fall för Stokes sats! Orienteringen av kurvan C gör att ytan Y (dvs $z = 2xy$ innanför C) ska ha normal "uppåt". Arbetet är då, med $\boldsymbol{r} = (x,y,2xy)$, $\boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = (-2y,-2x,1)$ och D = enhetscirkelskivan,

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \iint_Y (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{N}dS = \iint_D (-4xy,-1,-3y^2)\cdot(-2y,-2x,1)dxdy = \cdots = -\frac{3\pi}{4}$$

   Här har ett par termer kapats då deras integral över D blir noll av symmetriskäl, och polära koordinater har använts till slut. **Arbetet är $-\mathbf{3}\pi/\mathbf{4}$.**

6. Välj $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y}$, $y > 0$ och sätt $F(y) = \int_0^\infty f(x,y)dx$. Vår integral blir då $F''(1)/2$. Detta förutsätter att derivering kan flyttas in under integraltecknet, vilket ska motiveras. Gör man på detta sätt, finner man att integralen blir $\mathbf{3}\pi/\mathbf{16}$.