Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2013 03 16 kl. 14.00–18.00.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Peter Helgesson tel 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng.

Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2013 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida:

http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1213

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper. /LF

---

1. (a) Funktionen $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$ har två stationära punkter.
   Bestäm deras karaktärer (lokalt max/min eller sadelpunkt). (3p)

   (b) Visa att ytorna $x^2 - 2yz + y^3 = 4$ och $x^2 + 2y^2 - z^2 = -1$ skär varandra under rät vinkel i punkten $(1,-1,2)$. (3p)

   (c) Beräkna $\int_C zdx + xdy + ydz$ där C är räta linjen från $(1,1,2)$ till $(3,0,3)$. (3p)

   (d) Kan man beräkna $\dfrac{dy}{dx}$ ur ekvationen $y\cos x = x^2 + y^2$?
   Gör detta och precisera villkoren. (3p)

2. En strömning har hastighetsfältet $\boldsymbol{v}(x,y,z) = (2xz, x+z^2, z^2+y)$. Beräkna flödet per tidsenhet av $\boldsymbol{v}$ ut ur det område som begränsas av koordinatplanen och planet $2x + 2y + z = 2$. (7p)

3. En partikel påverkas av kraftfältet $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2 - y^3 + z, x^3 + y - z^2, -x + y^2 + z^3)$. Beräkna det arbete som uträttas då partikeln rör sig ett varv moturs sett ”uppifrån” längs skärningskurvan mellan konen $x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z > 0$, och paraboloiden $x^2 + y^2 + 2z = 3$. (7p)

4. Bestäm största värdet av $ax + by$, där a och b är positiva konstanter, på kurvstycket $x^4 + y^4 = 1,\ x > 0,\ y > 0$. Glöm inte att motivera existensen av detta maximum. (7p)

5. Beräkna arean av ellipsoidytan som ges av ekvationen $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$ (7p)
   Ifall det skulle behövas, får du använda att $\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}(t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2}))$.

6. För vilka reella tal α konvergerar den generaliserade dubbelintegralen (7p)

   $$\iint_D \frac{(x+y)^\alpha}{1 + x^2 - y^2}\,dxdy, \text{ där } D = \{(x,y) : 0 < x + y < \infty,\ y \le x \le y + 1\}?$$

7. (a) Definiera *integrerbarhet* för en begränsad funktion $f(x,y)$ på en kompakt rektangel $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. (2p)

   (b) Bevisa att om en funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln D, så är f integrerbar på D. (5p)

8. (a) Bevisa att varje potentialfält med potential av klassen $\mathcal{C}^2$ är virvelfritt.
   (Ska göras detaljerat, hänvisa *inte* till s.k. nablaräkning!) (3p)

   (b) Ange tillräckliga villkor för att likheten $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)\,dx = \int_0^\infty f'_y(x,y)\,dx$ ska gälla. (3p)