Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2014 08 25 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Matteo Molteni, 0703-088304

För godkänt krävs minst 24 poäng. Betyg 3: 24-35 poäng, betyg 4: 36-47 poäng, betyg 5: 48 poäng eller mera.

Bonuspoäng från 2014 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1314

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Funktionen $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$ har stationär punkt i $(1,1)$. Klassificera den: lokalt max, lokalt min eller sadelpunkt. (2p)

   (b) Uttryck $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ i de nya variablerna $u = x,\ v = \frac{y}{x}$ och derivator i dessa variabler. (3p)

   (c) Motivera varför ekvationen $x^3 + y^3 + xy = 11$ lokalt kring punkten $(1,2)$ definierar y som en deriverbar funktion av x och beräkna $y'(1)$. (3p)

   (d) Skriv om den upprepade trippelintegralen $\int_0^1 (\int_0^z (\int_0^y f(x,y,z)dx)dy)dz$ så att man först integrerar z, sedan y och sist x. (2p)

2. Låt S_1 och S_2 vara ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$. (8p)

   (a) Beräkna volymen av den kropp V som begränsas av ytorna S_1 och S_2.

   (b) Vektorfältet $\boldsymbol{F} = (z + xy, y - y^2, x + yz)$ beskriver ett flöde genom den kropp som begränsas av ytorna S_1 och S_2. Beräkna det totala flödet ut från kroppen.

   (c) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (ze^{xz}, x, xe^{xz}) \cdot d\boldsymbol{r}$ där γ är skärningskurvan mellan ytorna S_1 och S_2 orienterad så att dess projektion på xy-planet går moturs.

3. (a) Vilket fält i planet har potentialen xe^{y^2}? (1p)

   (b) Beräkna kurvintegralen $\int_C (e^{y^2} - y)dx + (2xye^{y^2} + x)dy$, där C är halvcirkelbågen i övre halvplanet från $(1,0)$ till $(-1,0)$. (5p)

4. Beräkna den generaliserade integralen $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dxdy$, där D bestäms av olikheterna $x > 0,\ xy > 1$. Använd gärna polära koordinater. (7p)

5. Beräkna det minsta avståndet från origo till ytan $xy^2z^3 = 2$. (7p)

6. Den maximala arean av en triangel vars alla hörn ligger på en cirkel antas för en liksidig triangel. Vilken är den maximala arean av en triangel vars alla hörn ligger på ellipsen $5x^2 + 6y^2 = 30$? (7p)

7. (a) Definiera *differentierbarhet* för en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^1$. (2p)

   (b) Definiera *riktningsderivtan* $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a})$ av en funktion från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^1$ i en punkt $\boldsymbol{a}$ i riktningen given av enhetsvektorn $\boldsymbol{v}$. (2p)

   (c) Bevisa att om f är differentierbar, kan riktningsderivatan beräknas enligt formeln $f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}$. (4p)

8. Formulera och bevisa Greens formel. (7p)