Tentamen i Flervariabelanalys F/TM, MVE035

2015 04 14 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: Anders Martinsson, 0703-088304

För godkänt krävs minst 20 poäng.

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2015 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida: http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/mve035/1415

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Lennart Falk.

---

1. (a) Beräkna riktningsderivatan av $f(x,y) = xy + \ln(x^2+y^2)$ i punkten $(1,2)$ i den riktning i vilken f växer snabbast. (2p)

   (b) Bestäm de stationära punkterna till $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3y$ och avgör deras karaktär. (3p)

   (c) För den vektorvärda funktionen $(u,v) = \boldsymbol{f}(x,y)$ gäller att $\boldsymbol{f}(1,2) = (2,-1)$ och att $\boldsymbol{f}'(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Förklara varför $\boldsymbol{f}$ är lokalt inverterbar kring $(1,2)$ och beräkna $(\boldsymbol{f}^{-1})'(2,-1)$. (2p)

   (d) Arean av ytan $x^4 + y^4 + z = 1,\ z \geq 0$, kan uttryckas som en integral $\iint_D f(x,y)\,dxdy$. Bestäm $f(x,y)$ och D (men beräkna inte arean). (3p)

2. Utred om funktionen $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{om} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{om} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (1): har partiella derivator i $(0,0)$, (2): är differentierbar i $(0,0)$ och (3): tillhör $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. (4p)

3. Transformera den partiella diffentialekvationen $xf'_x + yf'_y = x + y$ till de nya variablerna $u = x/y,\ v = y$ (vi betraktar området $y > 0$). Bestäm sedan den lösning $f(x,y)$ som uppfyller villkoret $f(x,1) = x^2 + x + 1$. (6p)

4. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (2x - y + 1)\,dx + (x + 3y + 2)\,dy$ där γ är ellipsbågen $4x^2 + y^2 = 4$ från $(-1,0)$ till $(1,0)$ i övre halvplanet ($y \geq 0$). (6p)

5. Beräkna $\iint_Y \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{N}\,dS$, där $Y = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2,\ \ z \leq 1\}$ med uppåtriktad normal, och $\boldsymbol{F} = (e^y + xz,\ y^2 - x,\ z - 2yz)$. (6p)

6. Två kurvor γ_1 och γ_2 som saknar gemensamma punkter, har ekvationerna $u(x,y) = 0$ respektive $v(x,y) = 0$, där u och v är $\mathcal{C}^1$-funktioner vilkas gradienter överallt på kurvorna är $\neq \mathbf{0}$. Låt nu $P \in \gamma_1$ och $Q \in \gamma_2$ vara ett par av punkter som minimerar avståndet mellan kurvorna. Bevisa att linjen mellan P och Q är vinkelrät mot γ_1 i P och mot γ_2 i Q. (6p)

7. Bevisa att om en funktion $f(x,y)$ är kontinuerlig på en kompakt rektangel R, så är f integrerbar på R. (6p)

8. (a) Definiera begreppen *konservativt fält* och *potential*. (2p)

   (b) Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens. (4p)