Differentialkalkyl För Reellvärda Funktioner
Sammanfattning Av Läsvecka 1
MVE035

Filip Ahlman, Markus Andersson, Josef Bengtson, Adina Berg, Alfred Bergsten, Nadja Bergqvist, Arvid Bjurklint

24 januari 2016

Innehåll

1 Introduktion **1**

2 Partiella derivator **2**

3 Differentierbarhet **3**

4 Klassen $\mathcal{C}^1$ **3**

5 Kedjeregeln **4**

6 Gradient och riktningsderivata **5**

7 Differentialer **7**

8 Avslutning **8**

1 Introduktion

Temat för läsvecka ett är hur derivata i en variabel generaliseras till ett godtyckligt antal variabler. Alternativt kan materialet sägas handla om att i $\mathbb{R}^n$ hitta motsvarigheten till derivata i $\mathbb{R}$. Mer specifikt består innehållet av partiell derivata, differentierbarhet, funktioner av klassen $\mathcal{C}^1$, kedjeregeln, gradient, riktningsderivata och partiella derivator av högre ordning.

Syftet är att ge en sammanfattning av första veckans innehåll på en så pass övergripande nivå att helheten blir tydlig. Vidare ligger fokus på att förklara med ord det som är viktigast under läsveckan, eftersom sammanfattningen på så sätt kompletterar de precisa formuleringarna av satserna och deras bevis som redan finns tillgängligt i kurslitteraturen. Vid referenser till sidor nedan så är det Persson-Böiers som menas.

Notation

En utmaning med materialet är att det finns flera konkurrerande notationer. För att undanröja missförstånd som kan uppstå på grund av dessa inkluderas en lista över de viktigaste synonyma uttrycken under läsveckan. I texten nedanför används uttryckssättet till vänster i listan.

- Partiell derivata:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f'_x$$
- Funktion som beror på flera variabler:
$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$$
- Gradient:
$$\nabla f = \text{grad } f$$
- Riktningsderivata:
$$f'_v(\boldsymbol{a}) = D_v(\boldsymbol{a})$$

2 Partiella derivator

Partiella derivator handlar om att derivera funktioner som beror av fler än en variabel. Partiell, som är synonymt med delvis, innebär att derivera en funktion med avseende på en variabel, övriga ses som konstanter. För att avgöra om en funktion f är partiellt deriverbar i en punkt $\boldsymbol{a}$ använder vi följande definition:

Låt $\boldsymbol{a}$ vara en inre punkt i definitionsmängden D till funktionen f av n variabler. Då är f partiellt deriverbar med avseende på variabeln x_j i punkten $\boldsymbol{a}$ om gränsvärdet nedan existerar.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e}_j)-f(\boldsymbol{a})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,...,a_j+h,...,a_n)-f(a_1,...,a_n)}{h} \tag{1}$$

Detta gränsvärde kallas för den partiella derivatan med avseende på variablen x_j av f i punkten $\boldsymbol{a}$. Om alla de partiella derivatorna av funktionen f i punkten $\boldsymbol{a}$ existerar så är f partiellt deriverbar i punkten $\boldsymbol{a}$. Vidare sägs funktionen f vara partiellt deriverbar om och endast om den är partiellt deriverbar i varje punkt i sin definitionsmängd.

En funktion vars partiella derivator är kontinuerliga kan deriveras flera gånger. Notationen för att beteckna högre ordningars partiella derivator följer samma konvention som första ordningen. Exempelvis kan andra ordningens partiella derivator skrivas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}, \quad f''_{x_k x_j}, \quad f_{x_k x_j}, \quad f''_{kj} \quad \text{eller} \quad f_{kj}.$$

Partiell derivering är kommutativ under förutsättning att funktionen tillhör $\mathcal{C}^2$, se avsnitt 4, vilket innebär att ordningen på derivationen kan kastas om utan att derivatan ändras. Detta beskrivs i följande sats:

SATS 9 (s.87)

Om funktionen $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,x_2,...,x_n)$ är av klass $\mathcal{C}^2$ så gäller att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \quad \textit{där} \quad 1 \leq j,k \leq n. \tag{2}$$

Bevis av denna sats finns på sidan 87 i kursboken.

3 Differentierbarhet

Begreppet differentierbarhet är flervariableanalysens motsvarighet till deriverbarhet. Om funktionen f är differentierbar i sin definitionsmängd D så är

- f kontinuerlig i D
- f partiellt deriverbar i D

Funktionen f är differentierbar i en punkt $\boldsymbol{a} \in D$, där D är en öppen mängd, om $\exists\ \boldsymbol{A} = A_1,...,A_n$ och en funktion $\rho(h)$ så att

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = A_1 h_1 + ... + A_n h_n + |\boldsymbol{h}|\rho(\boldsymbol{h}) \tag{3}$$

och

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} \rho(\boldsymbol{h}) = 0$$

där A_1 är $\frac{\partial f}{\partial a_1}(\boldsymbol{a})$, A_2 är $\frac{\partial f}{\partial a_2}(\boldsymbol{a})$ och så vidare. Om f är differentierbar i varje punkt $\boldsymbol{a} \in D$ så är funktionen f differentierbar.

4 Klassen $\mathcal{C}^1$

Klassen $\mathcal{C}^1$ är användbar, då dess definition kan avgöra om en funktion är deriverbar. För att en funktion ska tillhöra $\mathcal{C}^1(D)$ så ska följande villkor uppfyllas:

- f ska vara definierad i en öppen mängd $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

- f ska vara partiellt deriverbar i D.
- Alla de partiella derivatorna till f ska vara kontinuerliga i D.

Klassen $\mathcal{C}^1$ går att utvidga till $\mathcal{C}^k$. Funktionen f tillhör klassen $\mathcal{C}^k$ om det första villkoret är uppfyllt, f är partiellt deriverbar k gånger i D och de partiella derivatorna till f av ordning k är kontinuerliga i D.

SATS 3 (s.56)
Varje funktion av klassen $\mathcal{C}^1$ är differentierbar.

Bevis av denna sats finns på sidan 56 i kursboken. Med hjälp av denna sats behövs inte definitionen för differentierbarhet utnyttjas för att avgöra om en funktion är differentierbar.

5 Kedjeregeln

I envariabelanalysen använde vi oss av den endimensionella kedjeregeln, som såg ut som följande, för att bestämma derivatan av en sammansatt funktion

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t)) \cdot g'(t). \tag{4}$$

Om vi istället skulle ha funktionen g av flera variabler $\boldsymbol{t} = (t_1,...,t_q)$ kan vi använda samma kedjeregel för den partiella deriveringen av f. Detta för att den partiella derivatan beräknas som en vanlig derivata med avseende på en specifik variabel. Alltså får vi

$$\frac{\partial}{\partial t_j}f(g(\boldsymbol{t})) = f'(g(\boldsymbol{t})) \cdot g'_{tj}(\boldsymbol{t}), j = 1,...,q \tag{5}$$

Nu ska vi titta på fallet där vi sätter in funktionerna $g_1(t),...,g_n(t)$ i vår funktion f. Följande sats beskriver derivatan för $f(\boldsymbol{g}(t))$:

SATS 4 (KEDJEREGELN, s. 65)
Vi har den differentierbara funktionen $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,...,x_n)$ i mängden $D \subseteq$

$\mathbb{R}^n$. Antag att funktionerna $g_1(t)$,...,$g_n(t)$ är deriverbara i intervallet $a < t < b$ på $\mathbb{R}$, och att $\boldsymbol{g}(t) = (g_1(x),...,g_n(t))$ tillhör D för alla t i (a,b). Då är den sammansatta funktionen $f(\boldsymbol{g}(t))$ också deriverbar i intervallet och derivatan beskrivs som följande

$$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{g}(t)) = \frac{\partial}{\partial g_1}f(\boldsymbol{g}(t)) \cdot \frac{dg_1}{dt} + ... + \frac{\partial}{\partial g_n}f(\boldsymbol{g}(t)) \cdot \frac{dg_n}{dt} \tag{6}$$

Bevis av denna sats finns på sidan 66 i kursboken.

Kedjeregeln kan förenklas med hjälp av en gradienten, som vi beskriver grundligare i nästa avsnitt. Eftersom att derivatan av den inre funktionen g är

$$\boldsymbol{g}'(t) = \left(\frac{dg_1}{dt}, ..., \frac{dg_n}{dt}\right) \tag{7}$$

kan vi skriva derivatan av f som en skalärprodukt enligt

$$\frac{d}{dt}f(\boldsymbol{g}(t)) = \nabla f \cdot \boldsymbol{g}'. \tag{8}$$

6 Gradient och riktningsderivata

Om f är en differentierbar funktion gäller att dess gradient är en vektor som består av funktionens partiella derivator, i fallet $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kan detta skrivas som

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})\right). \tag{9}$$

SATS 5 (s.76)
Om f är differentierbar i en öppen och bågvis sammanhängande mängd D, och $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ gäller att f är konstant på D. Bevis av denna sats finns på sidan 77 i kursboken.

$\nabla f(x,y)$ ger hur funktionen $f(\boldsymbol{a})$, $\forall \boldsymbol{a} \in D$, växer i x-riktning ($\frac{\partial f}{\partial x}$), och i y-riktning ($\frac{\partial f}{\partial y}$). För att få hur funktionen växer längs en annan riktning krävs ett nytt begrepp, riktningsderivata. Riktningsderivata ger hur snabbt en differentierbar funktion växer längs en viss riktning. Riktningen anges med en vektor $\boldsymbol{v}$ med egenskapen $\|\boldsymbol{v}\| = 1$. Då gäller att riktningsderivatan av f i punkten $\mathbf{a}$ definieras som

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t}. \tag{10}$$

När man beräknar riktningsderivata använder man inte definitionen, istället använder man följande sats.

SATS 6 (s.78)
Om f är en differentierbar funktion och $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, gäller följande samband mellan gradient och riktningsderivata,

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} \tag{11}$$

Bevis av denna sats finns på sidan 78 i kursboken.

SATS 7 (s.79)
Om $\boldsymbol{a}$ är en punkt, $\boldsymbol{v}$ är en normerad riktningsvektor och f är en differentierbar funktion, så gäller det att f växer snabbast i riktningen

$$\boldsymbol{v} = \frac{\triangledown f(\boldsymbol{a})}{\|\triangledown f(\boldsymbol{a})\|}, \tag{12}$$

samt att riktningsderivatans maximala värde är lika med $\|f(\boldsymbol{a})\|$. Satsen motiveras genom att titta på formeln för f:s riktningsderivata. För någon vinkel θ mellan $\triangledown f(\boldsymbol{a})$ och $\boldsymbol{v}$ gäller,

$$f'_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \triangledown f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = \|\triangledown f(\boldsymbol{a})\| \underbrace{\|\boldsymbol{v}\|}_{=1} \cos\theta \leq \|\triangledown f(\boldsymbol{a})\|. \tag{13}$$

Bevis av denna sats finns på sidan 80 i kursboken. Här ser vi att riktningsderivatan är som störst precis då $\triangledown f(\boldsymbol{a})$ och $\boldsymbol{v}$ är parallella, det vill säga när $\boldsymbol{v} = \frac{\triangledown f(\boldsymbol{a})}{\|\triangledown f(\boldsymbol{a})\|}$, samt att derivatans storlek då är lika med $\|\triangledown f(\boldsymbol{a})\|$.

SATS 8 (s.82)

Om $f(x,y) \in \mathcal{C}^1$ och $\nabla f(a,b) \not\equiv 0$, gäller att i punkten (a,b) är $\nabla f(a,b)$ normalvektor till den nivåkurva, $f(x,y) = C$, som går genom denna punkt. Analogt gäller för en funktion av tre variabler.

Sats 8 ger oss att i en punkt (a,b) blir tangentens ekvation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(y-b) = 0 \tag{14}$$

På liknande sätt kan man visa att tangentplanet till en funktionsyta $z = f(x,y)$ i punkten (a,b) har ett tangentplan vars ekvation ges av

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b). \tag{15}$$

7 Differentialer

Differentialen till en funktion kan ses som en linjär approximation av ändringen i funktionsvärdet. En funktion $f(\boldsymbol{x})$ har differentialen $df(\boldsymbol{x})$ i punkten $\boldsymbol{x}$ och den ges av

$$df(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}h_n. \tag{16}$$

Ofta förenklar man detta uttryck genom att inte framhäva beroendet av $\boldsymbol{h}$ och skriver df istället för $df(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})$ samt $dx_1,...,dx_n$ istället för och $h_1,...,h_n$. Differentialen skrivs då

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

(17)

8 Avslutning

Övergripande handlar läsveckans innehåll om att hitta motsvarigheten till derivata i en variabel för funktioner med flera variabler. Bland de delar som tagits upp är differentierbarhet, och det besläktade begreppet klassen $\boldsymbol{C}^k$, egenskaper hos funktioner som motsvarar deriverbarhet i envariabel. Bland verktygen motsvarar den partiella deriveringen, med vars hjälp flertalet av de övriga verktygen byggs upp, derivata när övriga variabler ses som konstanter. Gradienten, som bland annat ger ett smidigt sätt att beräkna riktningsderivatan och förenklar kedjeregeln, kan sägas motsvara derivatan av hela funktionen och riktningsderivatan är projektionen av gradienten i önskad riktning. Slutligen kan differentialer sägas vara en linjär approximation av funktionsvärdet.