Tentamen i Flervariabelanalys, MVE035
2016-03-14, π, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.
Telefon: anknytning 5325
Telefonvakt: Raad Salman
För godkänt krävs minst 20 poäng.
Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida. Talen i parentes bredvid uppgifterna och deluppgifterna anger antalet poäng de ger.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.
Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt $f(x, y) = 2x^4 + y^2 + x$.
   (a) Bestäm tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(1, 1, 4)$. (2)
   (b) Bestäm Taylorutvecklingen av f upp till grad 2 i punkten $(1, 1)$. (2)
   (c) Finn och klassificera kritiska (boken: *stationära*) punkter till f. (2)
   (d) Bestäm globalt max och min av funktionen f på området av alla $x \in [-1, 0], y \in [-1, 1]$. Motivera! (2)
   (e) Visa att nivåytan C bestämd av $F(x, y, z) := z - f(x, y) = 0$ kan, lokalt runt $(-1, 1, 2)$, skrivas som grafen $x = g(y, z)$ för en $\mathcal{C}^1$ funktion $g(y, z)$ definierad i en omgivning till punkten $(1, 2)$ och bestäm $\nabla g(1, 2)$. Obs. du behöver inte konstruera g explicit, bara visa dess existens och ange dess gradient i $(1, 2)$. (4)

2. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy - ayz, x^2 - xz, z - xy)$. Bestäm konstanten a så att $\mathbf{F}$ blir konservativt, och för detta a räkna ut arbetet $\mathbf{F}$ utför längs kurvan $\mathbf{r}(x) = (x, 1 - x^5, 1 - x^5)$ där x går från 0 till 1. (4)

3. Betrakta vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = (-x^2 y, e^{-\sin(y)})$. Beräkna arbetet som $\mathbf{F}$ utför längs kurvan γ som består av två delar: Först $\mathbf{r}(t) = (1 - t, t)$ där t går från 0 till 1, följt av $\mathbf{r}(t) = (-t, 1 - t)$, t går från 0 till 1. (5)

4. En cylinder $x^2 + y^2 = 1$ skärs av två plan $z = 2$ och $z = y + 1$. Dessa tre ytor begränsar tillsammans ett kompakt område K. Kalla också Y den del av randen till K som ligger på planet $z = y + 1$, och Z den del av randen till K som ligger på cylindern $x^2 + y^2 = 1$.
   (a) Beräkna massan för K om vi har en densitet på formen $\rho(x, y, z) = z$. (3)

(b) Vi ges ett vektorfält $\mathbf{F} = (y, -x, z^2)$. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ner genom Y. (3)

(c) Bestäm ytarea-elementet dS på Z för lämplig parametrisering $\mathbf{r}$ via cylindriska koordinater och räkna ut arean till Z genom att sätta upp och räkna ut relevant ytintegral. (4)

5. Formulera och bevisa satsen om Taylorutvecklingar upp till grad 2 med felterm av ordning 3, för en funktion i 2 variabler. (6)

6. Formula och bevisa Greens sats för en rektangel $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. (6)

7. I denna uppgift, antag att $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Funktionen ϕ säges ha *medelvärdesegenskapen* om för alla $r > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi dS$. Här är $S_r(\mathbf{x})$ sfären med radie r med centrum i $\mathbf{x}$ och dS ytareaelementet därpå.

   (a) Visa att ϕ har medelvärdesegenskapen om och endast om $A(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r(\mathbf{x})} \phi dS$ är konstant i variabeln $r > 0$. (2)

   (b) Visa att ϕ har medelvärdesegenskapen om och endast om $\Delta\phi := \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0$. Här kan (a) vara till hjälp. (5)

Totalt 7 frågor med totalt 50 poäng. Grattis också på π-dagen och lycka till! /Dennis

Lösningar

1a. Tangentplanet för en punkt $(a, b, f(a, b))$ på en funktionsyta ges av

$$(-f_x(a, b), -f_y(a, b), 1) \bullet (x - a, y - b, z - f(a, b)) = 0.$$

Eftersom $f_x = 8x^3 + 1, f_y = 2y$ så får vi

$$(-9, -2, 1) \bullet (x - 1, y - 1, z - 4) = 0$$

eller omskrivet

$$z = 9x + 2y - 7.$$

1b. Taylorpolynomet av grad 2 i en punkt (a, b) kan skrivas som, där vi satt $h = x - a, k = y - b$,

$$P(h, k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2}[f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2].$$

Det räcker från föregående uppgift att räkna ut 2:a-derivatorna i $(1, 1)$. Det görs lätt, och vi finner att

$$P(h, k) = 4 + 9h + 2k + 12h^2 + k^2.$$

1c. En kritisk punkt ges som lösning till $\nabla f(a, b) = (0, 0)$. I vårt fall innebär detta att $8x^3 + 1 = 2y = 0$, som har den unika lösningen $x = \frac{-1}{2}, y = 0$. Den associerade kvadratiska formen ges av

$$Q(h, k) = f_{xx}(-1/2, 0)h^2 + 2f_{xy}(-1/2, 0)hk + f_{xx}(-1/2, 0)k^2 = 6h^2 + 2k^2.$$

Den är klart positivt definit, och alltså är vår kritiska punkt ett strängt lokalt minimum.

1d. Eftersom området är kompakt och f är kontinuerlig, måste f ha både maximum och minimum. Vi har redan hittat en kritisk punkt i det inre av området som anges, där funktionen har värdet $f(-1/2, 0) = -3/8$. Vi behöver även betrakta ränderna. En standardräkning visar att de eventuella punkterna där max och min kan finnas endera i hörnen $(-1, 1), (-1, -1), (0, 1), (0, -1)$ eller i $(-1/2, 1), (-1/2, -1)$. Motsvarande värden för $f(x, y)$ blir $2, 2, 1, 1$ och $5/8, 5/8$. Inspektion ger direkt att 2 är ett globalt max, och $-3/8$ är ett globalt minimum.

1e. Det är svårt att lösa ut x ur ekvationen. Istället använder vi att om $F_x(-1, 1, 2) = \partial F/\partial x(-1, 1, 2) \neq 0$, så säger implicita funktionssatsen att ett sådant g finns. Men $F_x = -8x^3 - 1$, som är 7 för $x = -1$. Vi vet också att $g_y = -F_y/F_x, g_z = -F_z/F_x$. Om man inte kommer ihåg detta, kan det härledas från formlerna $F(g(y, z), y, z) = 0$, och $0 = dF/dy = F_x g_y + F_y$, där den senare följer från kedjeregeln. Nu är alltså $F_y = -2y, F_z = 1$, så $g_y(-1, 1, 2) = 2/7, g_z(-1, 1, 2) = -1/7$.

2. Om $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = \nabla\phi$, så måste, bland annat

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}.$$

I detta fall säger detta att $-ay = -y$, från vilket vi sluter oss att vi måste ha $a = 1$. Man kan här även verifiera utan svårighet att $\operatorname{curl} \mathbf{F} = (0,0,0)$, från vilket man kan sluta sig att det faktiskt finns en potential ϕ, eftersom $\mathbf{F}$ är definierat i hela rymden som är enkelt sammanhängande. För en sådan potential är $\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \phi(1,0,0) - \phi(0,1,1)$, där γ är en godtycklig kurva mellan $(0,1,1)$ och $(1,0,0)$, t.ex. den som anges i uppgiften.
Detta säger dock inget om vad en eventuell potential är. Vi söker alltså en funktion $\phi(x,y,z)$ så att $\phi_x = 2xy - yz, \phi_y = x^2 - xz, \phi_z = z - xy$. En standardräkning ger att

$$\phi(x,y,z) = x^2y - xyz + z^2/2 + C$$

där C är en godtycklig konstant. Vi får då att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \phi(1,0,0) - \phi(0,1,1) = 0 - 1/2 = -1/2.$$

3. Detta går att göra på flera sätt, t.ex. kan man notera att vektorfältet $G(x,y) = (0, e^{\sin y})$ är konservativt, utan att vi för den delen vet hur man tar fram en potential. Eftersom vägintegralen för G längs γ slutar och börjar på samma y-värde, dvs. $y = 0$ så kommer det utförda arbetet att vara noll, och man reduceras till att räkna ut vägintegralen av $\mathbf{F} - G = (-x^2y, 0)$.
Istället kan man använda Greens formel, efter att vi tillslutit γ med en kurva $\ell(t) = (t, 0)$, där t går från -1 till 1, det bildar en typ av triangelområde T som begränsas av $y = 1 - x, y = 0, y = x - 1$. Då säger att Greens sats att

$$\int_\ell \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_{\gamma+\ell} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_T \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_T x^2 dxdy.$$

Eftersom $y = 0$ på ℓ så kommer $\int_\ell \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0$. Vi noterar nu att $T = T_+ \cup T_-$ där T_+ (resp. T_-) motsvarar den del av triangeln med positiva och negativa x-värden. Eftersom x^2 är jämn så är

$$\iint_T x^2 dxdy = 2 \iint_{T_+} x^2 dxdy = 2 \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 dydx = 2 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 1/6.$$

4a. Massan ges av formeln

$$\iiint_K \rho(x,y,z) dV.$$

Låt nu $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Då är

$$\iiint_K z dV = \iint_D \int_{z=y+1}^{z=2} z dz dx dy.$$

$\int_{z=y+1}^{z=2} z dz = [z^2/2]_{y+1}^2 = 2 - \frac{1}{2}(y+1)^2 = 3/2 - y^2/2 - y$. Nu är

$$\iint_D \left(3/2 - y^2/2 - y\right) dxdy = 3/2 \operatorname{Area}(D) - \iint_D y^2/2 dxdy.$$

Den sista integralen kan räknas ut via t.ex. polära koordinater, $x = r\cos t, y = r\sin t, dxdy = rdrdt$. Då får vi $y^2 = r^2\sin^2 t = r^2\frac{1-\cos(2t)}{2}$, och

$$\iint_D y^2/2dxdy = \int_0^1\int_0^{2\pi} r^3/4(1-\cos(2t))drdt = \pi/8.$$

I slutänden får vi alltså att massan ges av $11\pi/8$ viktenheter.

4b. Vi kan parametrisera området med D och använda att vektorareaelementet ges av $\mathrm{n}\,dS = (0, 1, -1)dxdy$ till Y. Alternativt kan vi också använda Gauss divergenssats på hela K. Eftersom normalen till $x^2 + y^2 = 1$ ges av $(x, y, 0)$ ser vi direkt att flödet genom Z blir noll, eftersom $\mathbf{F} \bullet (x, y, 0) = 0$. Gauss divergenssats säger att flödet ut genom ∂K ges av $\iint_K \operatorname{div}\mathbf{F}dV = \iint_K 2zdV = 11\pi/4$, från förra uppgiften. Vi måste dock subtrahera flödet ut ur locketpå ∂K som ges av $z = 2$. Detta flöde ges av $\iint_D \mathbf{F} \bullet (0, 0, 1)dS$, för $z = 2$, vilket reduceras till $\text{Area}(D)2^2 = 4\pi$. Alltså blir flödet neråt genom Y lika med $11\pi/4 - 4\pi = -5\pi/4$.

4c. Cylindriska koordinater på en cylinder med fix radie 1 ges av $\mathbf{r}(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$. Ytarea-elementet ges sedan av $dS = |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|d\theta dz = d\theta dz$. Arean blir då, om vi skivar i θ-riktning, $\int_0^{2\pi}\int_{z=y+1}^{z=2} dzd\theta = \int_0^{2\pi}(2-(y+1))d\theta = \int_0^{2\pi} 1 - \sin\theta d\theta = 2\pi$. Nu efterfrågar uppgiften uttryckligen att man ska göra detta på det här sättet, men annars är det inte svårt att se att arean är hälften av mantelarean på cylindern $z = 0, z = 2$, dvs. $2\pi * 2/2 = 2\pi$.

5. Se föreläsningsanteckningarna eller boken.

6. Se föreläsningsanteckningarna eller boken (och i det senare fallet, ta de begränsande funktionerna till konstanter).

7a. Per definition, om ϕ har medelvärdesegenskapen, så är $A(r)$ konstant och lika med $\phi(\mathbf{x})$. Omvänt, antag att $A(r)$ är konstant. Eftersom funktionen är kontinuerlig, bestämmer vi dess värde genom att låta $r \to 0$. Man kan argumentera utifrån medelvärdessatsen att $A(r) \to \phi(\mathbf{x})$. Ett mer konkret bevis ges av observationen

$$A(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r(\mathbf{x})} dS_r = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1(\mathbf{0})} f(\mathbf{x} + r\mathbf{n})dS$$

där $\mathbf{n}$ är punkterna som beskriver enhetssfären. Om vi får flytta in gränsvärdet $r \to 0$ under integraltecknet så är vi klara, eftersom vi då integrerar över en konstant. Detta kan ses på många olika sätt.

7b. Vi visar att $\Delta\phi = 0$ om och endast om $A'(r) = 0$. Här använder vi att vi får derivera under integraltecknet på en kompakt. Enligt kedjeregeln får vi då

$$A'(r) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1(\mathbf{0})} \nabla\phi(\mathbf{x} + r\mathbf{n}) \bullet \mathbf{n}dS = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r(\mathbf{x})} \nabla\phi \bullet \mathbf{n}dS.$$

Den senare integralen kan räknas ut via Gauss divergenssats, och vi får

$$\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r(\mathbf{x})} \nabla\phi \bullet \mathbf{n}dS = \frac{1}{4\pi r^2}\iiint_{B_r(\mathbf{x})} \nabla \cdot \nabla\phi dV$$

där $B_r(\mathbf{x})$ är bollen med radie r och centrum i $\mathbf{x}$. Vi har nu slutit oss till att

$$A'(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{B_r(\mathbf{x})} \nabla \cdot \nabla \phi dV.$$

Detta är 0 om och endast om $\iiint_{B_r(\mathbf{x})} \nabla\cdot\nabla\phi dV = 0$. Eftersom ϕ är $\mathcal{C}^2$ så $\nabla\cdot\nabla\phi$ kontinuerlig. Via medelvärdessatsen får vi då att detta händer om och endast om $\nabla\cdot\nabla\phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\phi = 0$.